Rallye mathématique de Neuchâtel

Étape 2

Problème 1

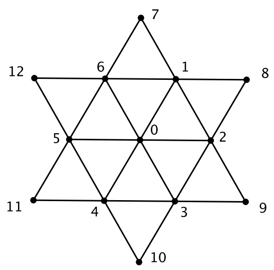
Soit S en ensemble fini de points dans le plan tels que tout ensemble de trois points parmi eux n'est pas contenu dans une droite. Pour chaque polygone convexe P dont les sommets sont dans S, on note $\alpha(P)$, le nombre de sommets de P et $\beta(P)$, le nombre de points de S en dehors de P. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\sum_P x^{\alpha(P)}(1-x)^{\beta(P)} = 1.$$

NB : Dans ce problème, un segment, un point et l'ensemble vide sont considérés comme des polygones à $2, 1$ et 0 sommets, respectivement.

Problème 2

L'étoile à 6 pointes de la figure est régulière : tous les angles internes des petits triangles sont égaux. On assigne à chacun des points numérotés une couleur : vert ou rouge. Montrer qu'il y aura toujours 3 points de la même couleur qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.



Problème 3

Un point du plan $\mathbb{R}^2$ est rationnel si ses deux coordonnées sont des nombres rationnels. Le plan $\mathbb{R}^2$ est-il recouvert par les segments fermés dont les extrémités sont des points rationnels ?

Règles

1. Vos solutions doivent être soumise avant le **20 novembre, 23h59** sur la page Moodle du Rallye (`https://moodle.unine.ch/course/view.php?id=4898`) ou dans le carton prévu à cet effet dans le secrétariat de l'institut de maths (le carton y est !)
2. Vos solutions doivent être soignées, et justifiées.
3. La solution d'un problème est jugée soit juste, soit fausse, ce qui rapporte 1 ou 0 point.
4. A la fin de l'année académique, un total **d'au moins 9 points sur 18** sera récompensé par un prix.
5. Vous pouvez rendre des solutions **individuelles** ou **par équipes de deux** ; dans ce cas nous vous demandons de garder la même équipe tout au long du rallye, car en cas de prix les deux membres de l'équipe se partageront le prix.

Nous vous souhaitons beaucoup de plaisir avec ce rallye !

L'équipe "rallye" : Laura GRAVE DE PERALTA, Laurent HAYEZ, Elisa LORENZO GARCÍA, Leonard TSCHANZ, Alain VALETTE, Alexandre ZUMBRUNNEN.

Solutions de l'Étape 1

Problème 1

Un lutin possède 3000 pièces d'or. Il est en bas d'une tour de 1000 étages, et veux transporter un maximum de pièces d'or tout en haut de la tour. Pour ce faire, il va employer l'ascenseur. Mais cet ascenseur est payant : pour chaque étage parcouru (montée ou descente), le lutin doit payer 1 pièce d'or. De plus, la charge maximale que l'ascenseur peut transporter correspond exactement au poids du lutin additionné de 1000 pièces d'or (il ne peut donc transporter que 1000 pièces d'or à la fois).

Combien de pièces d'or le lutin parviendra-t-il à amener en haut de la tour ? (le lutin peut constituer des tas de pièces d'or à différents étages de la tour).

Solution. Commençons par observer que le lutin a intérêt à maximiser le nombre de pièces qu'il prend avec lui lors de ses voyages. Il prend donc 1000 pièces avec lui, monte de 1 étage, dépose 998 pièces et redescend. Il répète cette opération encore une fois. Il lui reste donc 1000 pièces à l'étage zéro et a $2 \times 998 = 1996$ pièces à l'étage un. Il monte le reste à l'étage un, ce qui lui coûte 1 pièce, et possède maintenant un magot de $1996 + 999 = 2995$ pièces.

On voit que monter son magot de 1 étage lui coûte 5 pièces, car il doit faire cinq fois le trajet. Ceci est vrai tant que son magot est composé de plus de 2000 pièces.

Il répète donc son opération en perdant 5 pièces par étage parcouru, et ce jusqu'à arriver à l'étage 200. A ce moment-là, sa fortune sera de $3000 - 5 \times 200 = 2000$ pièces. (On remarque que le lutin peut aussi monter directement à l'étage 200 plutôt que de monter étage par étage).

A partir de l'étage 200, chaque étage parcouru lui coûte 3 pièces. Ceci est vrai tant que sa fortune est composée de plus de 1000 pièces.

Il monte donc ainsi jusqu'à l'étage 533, et possède à ce moment-là une fortune de $2000 - 3 \times 333 = 1001$ pièces.

A ce moment-là, un choix s'impose :

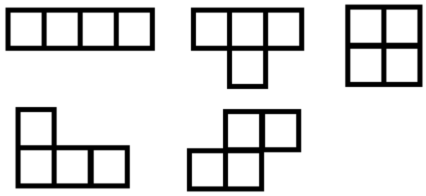
- soit il monte encore 1 étage de cette façon puis monte les 466 étages restant d'un coup, pour finir avec une fortune de $1001 - 3 \times 1 - 466 = 532$ pièces ;
- soit il prend 1000 pièces avec lui et monte les 467 étages restants d'un coup, pour finir avec une fortune de $1000 - 467 = 533$ pièces, avec 1 pièce abandonnée à l'étage 533.

Il choisit la seconde option qui lui est bénéfique. Sa fortune une fois en haut est donc de 533 pièces d'or.

Solutions correctes : T. Barblan, M. Boukadoum, M. Donker, T. Jaccard, G. Ménard ; également résolu correctement par F. Périat, J. Pierre (Lycée DDR, Neuchâtel) □

Problème 2

Est-il possible de former un rectangle avec les tetrominos ci-dessous ?



Solution. Non, ce n'est pas possible. Il y a 5 tetrominos formés par 4 petits carrés. Alors le rectangle aurait 20 petit carrés. Si l'on colore les carrés comme pour un échiquier on aurait 10 petits carrés noirs et 10 blancs (parce que 20 est pair et donc au moins un des côtes du rectangle serait pair). Cependant, en regardant les 5 tetrominos on voit que tous sauf celui en forme de T auraient 2 petits carrés de chaque couleur. Celui en forme de T aurait 3 petits carré d'une couleur et 1 de l'autre, donc impossible de former un rectangle avec ces tetrominos.

Solutions correctes : Tobias Barblan, Mohamed Boukadoum, Jonas Chevroulet, Meline Donker, Florent Périat, Fraçois Sigrist, Nadine Solioz. □

Problème 3

Une randonneuse marche toujours à 4km/h à plat, toujours à 3km/h en côte, et elle court toujours à 6km/h en descente. Sa rando d'aujourd'hui l'amène de A à B en 4h. Elle revient par le même chemin, en 3h. Quelle est la distance de A à B ?

Solution. Si a est la distance parcourue à plat à l'aller, b celle parcourue en côte, c celle parcourue en descente, on a une première équation :

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{6} = 4.$$

Pour le retour, la côte devient de la descente et vice-versa. D'où une seconde équation :

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{6} + \frac{c}{3} = 3.$$

En sommant les deux on trouve

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 7,$$

ou encore $a + b + c = 14$. Mais $a + b + c$ est exactement la distance de A à B.

Solutions correctes : T. Barblan, T. Jaccard, G. Ménard ; également résolu correctement par F. Périat, J. Pierre (Lycée DDR, Neuchâtel), P. Masai (Nagoya, Japon), F. Sigrist (Crans-Montana), H. Vermeiren (Bruxelles). □