

Rallye mathématique de Neuchâtel

Étape 1

Du 16 septembre au 11 octobre

En 2019-2020, l'Institut de Mathématiques lance un rallye-problèmes en mathématiques : nous soumettons aux étudiant-e-s de Bachelor et Master en mathématiques, sur une base facultative, des problèmes à résoudre de façon individuelle. Nous vous proposerons 3 problèmes tous les mois. Il y aura des prix, voir plus bas !

Ce sont les mêmes problèmes pour tout le monde, et vous pouvez à chaque fois résoudre un, deux ou trois problèmes - ou aucun. En vous fournissant un premier contact avec la recherche en mathématiques, nous espérons promouvoir l'apprentissage par les problèmes, l'émulation, et la prise de conscience du rôle de l'imagination et de la créativité par rapport aux recettes et aux connaissances acquises.

PROBLÈME 1

Soient C_1 et C_2 deux carrés dans le plan, d'aire 1 et de même centre.

1. Montrer *sans calcul* que l'aire de $C_1 \cap C_2$ est au moins $\frac{3}{4}$.
2. Trouver le plus grand $a \in (0, 1)$ tel que l'aire de $C_1 \cap C_2$ est au moins a , pour toutes les positions de C_1, C_2 .

PROBLÈME 2

L'institut de mathématiques de l'université de Neuchâtel organise une soirée pour Noël. Étant un petit institut, nous supposons que le nombre de participants à cette soirée n'est que de 6. Pour l'occasion, chacune des personnes apporte un cadeau de manière non nominative et avec le même papier d'emballage. Cependant la répartition des cadeaux se fait de manière étrange. En effet tout le monde dépose son cadeau dans une caisse lors de leur arrivée, puis lorsque minuit sonne chacun tire au hasard un paquet.

Quelle est la probabilité qu'au moins une personne ait reçu son propre cadeau ?

PROBLÈME 3

Montrer que pour tout $N \geq 3, N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| 1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right|^2 = \frac{3}{2}.$$

RÈGLES

1. Vos solutions doivent être soumises avant le **11 octobre, 14h00** au secrétariat de l'institut de mathématiques. Merci d'utiliser des feuilles séparées pour des problèmes différents.
2. Vos solutions doivent être soignées, et justifiées.
3. La solution d'un problème est jugée soit juste, soit fausse, ce qui rapporte 1 ou 0 point.
4. Vos solutions doivent être **individuelles**. Deux solutions trop similaires se verront attribuer 0 point.
5. Les étudiant-e-s ayant à la fin de l'année académique **au moins 9 points sur 18** se verront remettre un prix.
6. Un prix pour la solution la plus élégante sera également décerné à la fin de l'année académique.

Nous vous souhaitons beaucoup de plaisir avec ce rallye !

L'équipe "rallye" : Laura GRAVE, Laurent HAYEZ, Felix SCHLENK, Alain VALETTE, Alexandre ZUMBRUNNEN.