Rallye mathématique de Neuchâtel

Étape 3

Du 11 novembre au 06 décembre

Problème 1

Gaetano a deux horloges murales et observe qu'elles indiquent simultanément 16h. Il sait que leurs mouvements sont parfaitement réguliers. Cependant, le mouvement de la première est trop rapide de 1 %, tandis que le mouvement de la seconde est trop lent de 5 %. Après combien de temps les deux horloges de Gaetano indiqueront-elles pour la première fois la même heure ?

Problème 2

Soient $a_1, \ldots, a_n$ les longueurs des côtés d'un polygône, et P le périmètre de ce polygône. Montrer que

$$\frac{a_1}{P-a_1} + \frac{a_2}{P-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{P-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Problème 3

Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. Montrer qu'il existe un unique entier $N \geq 1$ tel que :

$$z_N < \frac{z_0 + \ldots + z_N}{N} \leq z_{N+1}.$$

Règles

1. Vos solutions doivent être soumise avant le **06 décembre, 14h00** au secrétariat de l'institut de mathématiques.
2. Vos solutions doivent être soignées, et justifiées.
3. La solution d'un problème est jugée soit juste, soit fausse, ce qui rapporte 1 ou 0 point.
4. Vos solutions doivent être **individuelles**. Deux solutions trop similaires se verront attribuer 0 point.

5. Les étudiants ayant à la fin de l'année académique **au moins 9 points sur 18** se verront remettre un prix.

Solutions de l'Étape 2

Problème 1

Trois équipes, A, B et C jouent à la pétanque. À la fin de chaque mène, l'équipe gagnante joue contre l'équipe qui attendait. L'équipe perdante boit du pastis au bord du terrain en attendant de rejouer. À la fin de la journée, l'équipe A a joué 9 parties, l'équipe B a joué 8 parties, et l'équipe C a joué 5 parties.

Qui a joué la 7ème partie ?

Solution. Le nombre total de parties jouées est

$$\frac{9+8+5}{2} = 11.$$

L'équipe C ayant joué 5 parties, elle a bu du pastis pendant 6 parties, i.e. les parties impaires. C'est donc les équipes A et B qui ont joué la 7ème partie.

Solutions correctes : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, M. Mathey, F. Spicher, L. Tschanz, M. Ziegler. $\square$

Problème 2

Montrez que si E est un ensemble de nombres entiers de cardinalité 52, alors il contient deux éléments tels que la différence de leurs carrés est un multiple de 100. Peut-on faire mieux que 52 ?

Solution. Notons d'abord que $x^2 \equiv (100-x)^2 mod\, 100$. Nous avons que, $[1] = [99]$, $[2] = [98]$... et donc au maximum 51 classes de carrés modulo 100.

Appliquons le principe des tiroirs de Dirichlet, en posant :

1. chaussettes : x^2 tels que $x \in E$.
2. tiroirs : classes de carrés modulo 100.

L'ensemble $\{x^2 \mid x \in E\}$ contient 52 éléments. Il y en a donc forcément deux qui sont dans la même classe et alors on a bien trouvé deux éléments dont la différence des carrés est un multiple de 100.

En faisant une liste complète par exemple, on peut se rendre compte en fait qu'il n'y a que 22 classes d'équivalences de carrés et donc tout ensemble à plus de 23 éléments en contient forcément deux tels que la différence de leurs carrés est un multiple de 100.

Solutions correctes : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, M. Matthey, M. Ziegler. $\square$

Problème 3

Déterminer tous les triplets de nombres premiers (a, b, c) tels que les différences $b-a$, $c-b$ et $c-a$ sont également des nombres premiers. *On rappelle que* 1 *n'est pas un nombre premier !*

Solution. Comme les premiers différents de 2 sont impairs, si $a > 2$ les nombres a, b, c sont impairs, donc $c - a$ est pair et > 2, une contradiction. Donc $a = 2$, et b, c sont impairs. Donc $c - b$ est premier et pair, c-à-d. $c = b + 2$. On utilise ensuite le fait que pour tout entier n, un des trois nombres $n - 2, n, n + 2$ est multiple de 3. On applique ceci à $b - 2, b, b + 2$: un de ces trois nombres premiers est multiple de 3, donc égal à 3. Le seul cas possible est $b - 2 = 3$, qui mène à l'unique solution $a = 2, b = 5, c = 7$.

Solutions correctes : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, M. Mathey, F. Spicher, L. Tschanz, M. Ziegler.

□

Les 3 problèmes de l'étape 2 ont aussi été résolus par F. Sigrist (prof. honoraire)

L'équipe "rallye" : Laura Grave de Peralta, Laurent Hayez, Felix Schlenk, Alain Valette, Alexandre Zumbrunnen. Vous pouvez récupérer vos solutions au bureau 208 (Alexandre et Laurent).