

Lamination et antilamination des réseaux euclidiens

Marc Gindraux

1 Introduction

Une forme quadratique réelle, définie positive, est dite *laminée* si sa décomposition en somme de carrés

$${}^t xAx = A_1(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n)^2 + A_2(x_2 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n)^2 + \cdots + A_n x_n^2$$

est obtenue par minimisation successive des coefficients A_1, A_2, \dots, A_{n-1} . L'invariant $\gamma''_-(A) = \min \sqrt{A_1/A_n}$, qui s'ajoute à la constante historique $\gamma''_+(A) = \max \sqrt{A_1/A_n}$ introduite par Korkine et Zolotareff, s'obtient en considérant toutes les laminations possibles. Ces invariants sont introduits pour majorer la fonction $\gamma'(A) = \sqrt{\gamma(A)\gamma(A^{-1})}$ de Bergé et Martinet et minorer (encore conjecturalement) la constante d'Hermite $\gamma(A)$.

Cet article introduit les *antilaminations*, consistant à maximiser successivement A_n, A_{n-1}, \dots, A_2 , et les invariants correspondants $\gamma'''_{\pm}(A)$. Nous étudierons les liens entre ces deux invariants et les utiliserons pour calculer la valeur de ces constantes pour la famille des réseaux laminés définis par Conway et Sloane.

Une liste de propriétés (e.g. croissance de $\gamma''_{n,\pm}$ et $\gamma'''_{n,\pm}$) et d'inégalités sera établie. Nous énoncerons la conjecture $\gamma'''_{5,-} = \sqrt{2}$ et étudierons ses conséquences (e.g. $\gamma_8 = 2$). Au cours de l'étude, nous pointerons le doigt sur une étrangeté : la discontinuité de ces invariants dès la dimension 3.

De nombreux calculs sur la famille des réseaux de Blichfeldt (infirmant la conjecture de Korkine et Zolotareff $\gamma'''_{5,+} = \sqrt{2}$) et celle des réseaux de racines sont inclus dans cet article.

2 Réduction d'Hermite-Korkine-Zolotareff et lamination

2.1 Notations et rappels

Soit E un espace euclidien de dimension n . On note $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de x, y appartenant à E , et $\|x\| = (x \cdot x)^{1/2}$ la norme du vecteur x . Un réseau Λ de E est un sous-groupe discret de rang n de E . La norme du réseau Λ est $\|\Lambda\| = \inf_{x \in \Lambda \setminus \{0\}} \|x\|$, et l'ensemble des vecteurs minimaux est $S(\Lambda) = \{x \in \Lambda \mid \|x\| = \|\Lambda\|\}$. Au couple (Λ, \mathcal{B}) formé d'un réseau Λ et d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de Λ , on associe la forme quadratique sur \mathbb{R}^n qui, à $x \in \mathbb{R}^n$, associe $Q(x) = \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\|^2 = {}^t xAx$, où A est la matrice de Gram de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a ainsi une bijection entre

classes d'isométrie de réseaux de E et classes modulo $GL_n(\mathbb{Z})$ des formes quadratiques définies positives sur \mathbb{R}^n .

Soit Λ un réseau de E , soit (e_1, \dots, e_n) une base du réseau Λ . Le discriminant du réseau Λ est la valeur absolue du déterminant d'une base de Λ . Le carré du discriminant est appelé le déterminant de Λ , noté $\det(\Lambda)$ ou encore $\det(e_1, \dots, e_n)$. L'invariant d'Hermite γ du réseau Λ est défini comme suit [2, 5, 11]

$$\gamma(\Lambda) = \frac{\|\Lambda\|^2}{\det(\Lambda)^{1/n}}, \quad \gamma_n = \sup_{\Lambda} (\gamma(\Lambda)).$$

Commençons par rappeler le procédé de réduction d'Hermite (en abrégé HKZ) des formes quadratiques définies positives (respectivement des réseaux euclidiens). Ce procédé a été introduit par Ch. Hermite [7] en 1850 et précisé par A. Korkine et G. Zolotareff en 1873 [9]. (Voir également [3, 10, 11, 12]). Il généralise la notion de réduction des formes quadratiques en dimension deux, définie par C.F. Gauss [6].

Soit Λ un réseau de E . Choisissons un vecteur minimal $e_1 = e_1^{(1)}$ de Λ . Projetons orthogonalement le réseau $\Lambda = \Lambda^{(1)}$ sur le sous-espace $F_1 = \mathbb{R}e_1^\perp$. Le projeté, qu'on notera $\Lambda^{(2)}$, est alors un réseau de F_1 . On répète le procédé avec le réseau $\Lambda^{(2)}$ et le sous-espace $F_2 = \mathbb{R}e_2^{(2)\perp}$ avec $e_2^{(2)}$ un vecteur minimal de $\Lambda^{(2)}$. On obtient ainsi une suite de réseaux relatifs $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \dots, \Lambda^{(n)}$ de rang $n, n-1, \dots, 1$ et une suite de vecteurs $e_i^{(i)} \in \Lambda^{(i)}$. On relève ensuite les $e_1^{(1)}, \dots, e_n^{(n)}$ en une base (e_1, \dots, e_n) de Λ de sorte que pour $i < j$, on ait $|e_i^{(i)} \cdot e_j| < \frac{1}{2} \|e_i^{(i)}\|^2$.

Dans le langage des formes quadratiques, soit $Q(x) = {}^t x A x$ la forme quadratique associée au réseau Λ . Quitte à remplacer Q par une forme équivalente Q_1 , on suppose que $(1, 0, \dots, 0)$ est un vecteur minimal de Q_1 . Cela présuppose de choisir un vecteur minimal de Q comme premier vecteur de base. La projection utilisée dans le cas des réseaux se traduit ici par un début de réduction de Gauss-Lagrange (décomposition en carrés)

$$Q_1(x_1, \dots, x_n) = A_1(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n)^2 + Q'_1(x_2, \dots, x_n)$$

dans laquelle la forme Q'_1 correspond au projeté du réseau associé à Q_1 . En continuant le procédé avec la forme Q'_1 , on obtient au bout de $n-1$ étapes une décomposition en carrés d'une forme équivalente à Q

$$Q \sim A_1(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n)^2 + A_2(x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n)^2 + \dots + A_n x_n^2.$$

Les coefficients α_{ij} doivent encore être réduits de façon à être dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ceci se fait de droite à gauche par une matrice de changement de base triangulaire supérieure avec des 1's sur la diagonale.

Les *coefficients externes* A_1, \dots, A_n correspondent au carré des normes minimales des projetés successifs du réseau associé à la forme Q . Les coefficients α_{ij} sont appelés les *coefficients internes*.

Remarques.

- i) Vu qu'à chaque étape, il n'y a qu'un nombre fini de vecteurs minimaux, il n'existe qu'un nombre fini de réductions d'Hermite d'un réseau.
- ii) On appellera réduction HKZ *faible* une réduction d'Hermite sans conditions sur les coefficients internes.

2.2 Lamination

Nous allons définir une notion de réduction des formes quadratiques qui reprend les principes des réseaux fortement laminés comme dans le livre de J.H. Conway et N.J.A. Sloane [5].

Définition. Soit Λ un réseau de E , on appelle *lamination* de Λ le procédé récursif de réduction de la forme quadratique associée suivant :

On choisit comme premier vecteur de base de Λ un vecteur minimal, c'est-à-dire un vecteur engendrant la section unidimensionnelle, notée Λ_1 , de déterminant le plus petit parmi toutes les sections de dimension 1. On obtient une base de Λ , en adjoignant à la i -ème étape un vecteur e_i qui fournit avec (e_1, \dots, e_{i-1}) une base de la section Λ_i de rang i et de déterminant minimal parmi toutes les sections de dimension i contenant $\Lambda_{i-1} = \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$.

Proposition 1. La lamination n'est autre qu'une réduction HKZ faible.

Preuve. Les deux procédés coïncident à la première étape. Supposons qu'ils coïncident jusqu'à l'étape $i - 1$. Soit Λ_{i-1} la section obtenue à cette étape. Pour déterminer une section $\Lambda_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ de déterminant minimal contenant Λ_{i-1} , il suffit de projeter orthogonalement le réseau Λ sur le sous-espace $F = (\mathbb{R}\Lambda_{i-1})^\perp$. On obtient alors le réseau $\Lambda^{(i)}$ de la réduction d'Hermite. On finit en choisissant un vecteur e_i dont la projection sur F réalise un minimum de $\Lambda^{(i)}$. Par orthogonalité, on a

$$\det(e_1, \dots, e_i) = \det(e_1, \dots, e_{i-1}) \cdot \|P_F(e_i)\|^2$$

où $P_F(e_i)$ est la projection du vecteur e_i sur le sous-espace F . Ainsi, minimiser le déterminant par rapport à e_i revient à prendre e_i tel que son projeté appartienne à $S(\Lambda^{(i)})$. \square

2.3 Fonction γ''

Au même titre que la fonction γ de Ch. Hermite [11], on définit deux invariants par isométries des réseaux. Reprenons les idées de A. Korkine et G. Zolotareff [9], et les notations introduites par A.-M. Bergé et J. Martinet [3].

Définition. Soit Λ un réseau de E de rang n , soit A une matrice de Gram de Λ HKZ-réduite. Considérons alors la décomposition en somme de carrés de la forme quadratique associée

$${}^t x A x = A_1(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n)^2 + A_2(x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n)^2 + \dots + A_n x_n^2$$

On définit les deux constantes γ'' :

$$\gamma''_+(\Lambda) = \max_{\text{HKZ}(\Lambda)} \sqrt{\frac{A_1}{A_n}} \quad \gamma''_-(\Lambda) = \min_{\text{HKZ}(\Lambda)} \sqrt{\frac{A_1}{A_n}} .$$

où max et min portent sur l'ensemble des réductions HKZ du réseau Λ .

Nous montrerons plus bas que les constantes $\gamma''_{\pm}(\Lambda)$ sont bornées. Ainsi, par analogie avec la constante d'Hermite, on définit les constantes $\gamma''_{n,+}$ et $\gamma''_{n,-}$ comme étant les bornes supérieures des constantes $\gamma''_+(\Lambda)$ et $\gamma''_-(\Lambda)$ parmi tous les réseaux Λ de E .

$$\gamma''_{n,+} = \sup_{\Lambda} (\gamma''_+(\Lambda)) \quad \gamma''_{n,-} = \sup_{\Lambda} (\gamma''_-(\Lambda)) .$$

Remarque. Il suffit de prendre une réduction faible de la matrice A , car on ne s'intéresse qu'aux coefficients externes.

Lemme 1.

- i) Soit (e_1, \dots, e_n) une base HKZ réalisant la valeur de $\gamma''_+(\Lambda)$ (respectivement $\gamma''_-(\Lambda)$), alors la projection des vecteurs e_{k+1}, \dots, e_n sur l'orthogonal de (e_1, \dots, e_k) est une base HKZ du réseau $\Lambda^{(k+1)}$ réalisant la valeur de $\gamma''_+(\Lambda^{(k+1)})$ (respectivement celle de $\gamma''_-(\Lambda^{(k+1)})$).
- ii) Il est également vrai que (e_1, \dots, e_k) est une base HKZ du réseau Λ_k , car les projetés de Λ_k sont des sections des projetés de Λ . Mais cette réduction d'Hermite ne réalise pas forcément les valeurs de $\gamma''_{\pm}(\Lambda^{(k)})$.

Il a été démontré par Ch.Hermite que $\gamma_n \leq (\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$; il en est de même pour la fonction γ'' .

Proposition 2. Les fonctions $\gamma''_{n,\pm}$ sont bornées par $(\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$.

Preuve. On montre par récurrence que, quel que soit le réseau Λ de E , $\gamma''_+(\Lambda) \leq (\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$. Regardons le cas $n = 2$.

Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^2 ; on a $A_1 A_2 = \det(\Lambda)$; ainsi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(A_1)^2}{A_1 \cdot A_2} = \frac{(A_1)^2}{\det(\Lambda)} = \gamma^2(\Lambda) .$$

Comme $\gamma(\Lambda) \leq (\frac{4}{3})^{1/2}$, on a $\gamma''_+(\Lambda) \leq (\frac{4}{3})^{1/2}$. Pour $n \geq 3$, on conclut par récurrence via

$$\frac{A_1}{A_n} = \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{A_2}{A_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_{n-1}}{A_n} \right) .$$

Donc $\gamma''_+(\Lambda) \leq (\gamma''_{2,+})^{(n-1)} = (\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$. □

2.4 Exemples

La famille des réseaux de Blichfeldt (1935). La famille des réseaux de H.F. Blichfeldt [4] joue un rôle important dans l'étude de la fonction γ'' . A. Korkine et G. Zolotareff ont calculé les valeurs de la fonction $\gamma''_{n,+}$ pour

$n \leq 4$. Il semble vraisemblable qu'ils aient cherché à prouver que $\gamma_{5,+}'' = \sqrt{2}$. La famille des réseaux de H.F. Blichfeldt infirme ce résultat. Elle est en fait un chemin de l'algorithme de Voronoï reliant les formes parfaites D_5 et A_5 . La forme quadratique associée aux réseaux de Blichfeldt est

$$2 \left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \right)^2 + \frac{3}{2} \left(x_2 - \frac{1}{3}(x_3 + x_4 - x_5) \right)^2 + \frac{4}{3} \left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 \right)^2 + (1+r) \left(x_4 - \frac{1}{2}x_5 \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}r\right)x_5^2$$

avec $0 \leq r \leq 2$.

Pour des valeurs de $0 < r < \frac{2}{3}$, on obtient des constantes γ_-'' et γ_+'' différentes. Pour les autres valeurs du paramètre r , les deux fonctions sont confondues. Remarquons que γ_-'' est toujours inférieure à $\sqrt{2}$. Par contre pour des valeurs du paramètre r comprises entre 0 et $(3-\sqrt{2})/2$, la fonction γ_+'' est strictement supérieure à $\sqrt{2}$ (cf. fig. 1). En particulier, le cas $r = \frac{1}{4}$ est intéressant. C'est à l'heure actuelle, le record pour la fonction γ_+'' en dimension 5. En choisissant les bonnes réductions d'Hermite, on obtient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 2 \end{pmatrix} \text{ qui fournit la valeur } \gamma_+'' = \sqrt{\frac{32}{15}}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \frac{7}{8} & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \frac{7}{8} & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ qui fournit la valeur } \gamma_-'' = \sqrt{\frac{19}{10}}$$

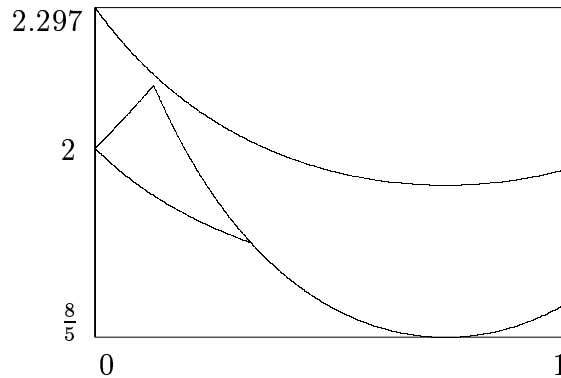


Fig. 1 : De haut en bas γ^2 , $(\gamma_+'')^2$, et $(\gamma_-'')^2$.

Chemin de Voronoï entre D_5 et D_5 . Il y a, à équivalence près, deux chemins de Voronoï différents reliant la forme parfaite D_5 à une forme

équivalente [11]. Nous ne considérerons, ici, que le chemin paramétré comme suit

$$A(r) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1+r & 1-r \\ 1 & 2 & 1 & 1+r & 1-r \\ 1 & 1 & 2 & 1+r & 1-r \\ 1+r & 1+r & 1+r & 2+2r & -r \\ 1-r & 1-r & 1-r & -r & 2 \end{pmatrix}$$

où $0 \leq r \leq 1$. Les matrices de Gram $A(r)$ et $A(1-r)$ sont équivalentes, par $A(r) = {}^tSA(1-r)S$, avec

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A l'exception de $r = 0, \frac{1}{2}$ et 1 où $\gamma_+'' = \sqrt{2}$, la fonction γ_+'' est strictement supérieure à $\sqrt{2}$, (cf. Fig 2) avec un maximum de $\sqrt{45/22}$ atteint aux points $r = \frac{1}{3}$ et $r = \frac{2}{3}$, sur la base

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La fonction γ_-'' est, à l'exception des deux extrémités, inférieure à $\sqrt{2}$, avec un minimum sur le réseau eutactique obtenu avec le paramètre $r = \frac{1}{2}$.

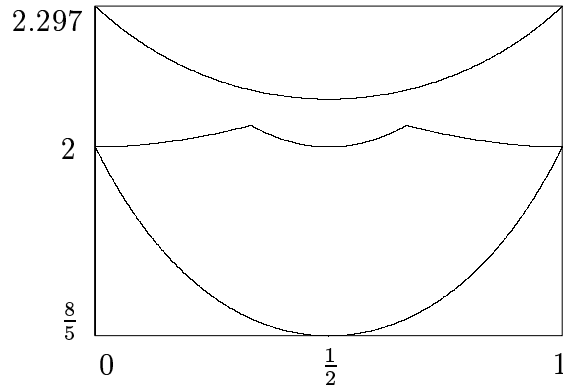


Fig. 2 : De haut en bas γ^2 , $(\gamma_+'')^2$, et $(\gamma_-'')^2$.

Remarque. Ces deux chemins de Voronoï sont les seuls en dimension 5 pour lesquels la fonction γ_+'' prend des valeurs supérieures à $\sqrt{2}$.

3 Antilamination

3.1 Notations et rappels

Soit Λ un réseau de E , (e_1, \dots, e_n) une base de Λ et A la matrice de Gram associée, on notera Λ^* son dual et (e_1^*, \dots, e_n^*) la base duale dont la matrice de Gram est donnée par A^{-1} . On désignera par \overline{A} , la matrice de Gram du réseau Λ où l'on prend les coordonnées dans l'ordre inverse. Matriciellement, cela s'obtient par $\overline{A} = {}^t_s A s$, avec

$$s = {}^t_s = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Commençons par deux lemmes [11].

Lemme 2. Soient Λ un réseau de E et F un sous-espace de E . Pour que $\Lambda \cap F$ soit un réseau de F , il faut et il suffit que $\Lambda^* \cap F^\perp$ soit un réseau de F^\perp .

En outre si ces conditions sont vérifiées, le dual de $\Lambda \cap F$ est la projection sur F du dual de Λ , c'est-à-dire

$$(\Lambda \cap F)^* = p_F(\Lambda^*).$$

Lemme 3. Soit $r \leq n$ un entier, soit (e_1, \dots, e_n) une base du réseau Λ de l'espace vectoriel E , notons F le sous-espace de E engendré par (e_1, \dots, e_r) . On a l'égalité

$$\det(\Lambda \cap F) = \det(\Lambda) \cdot \det(\Lambda^* \cap F^\perp).$$

3.2 Antilamination

On définit un procédé de réduction des formes quadratiques, qui reprend les idées de la lamination. Soit Λ un réseau de E , soit A une matrice de Gram du réseau Λ .

Définition. On appelle *antilamination* de A (en abrégé A_{anti}) le procédé récursif de réduction de la forme quadratique suivant :

On prend comme dernier vecteur de base e_n un vecteur tel que le sous-réseau $\Lambda_{(n-1)} = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ engendré par les $n - 1$ premiers vecteurs de base de Λ , soit de déterminant $\det(e_1, \dots, e_{n-1})$ minimal. On applique alors le même procédé au sous réseau $\Lambda_{(n-1)}$, et ainsi de suite, pour obtenir une antilamination de Λ .

Par le lemme 3, il convient de prendre comme dernier vecteur de base du réseau Λ un vecteur minimal du dual Λ^* . En effet, afin que $\det(e_1, \dots, e_{n-1})$ soit minimal, il faut et il suffit que e_n^* soit un vecteur minimal de Λ^* , car

$$\det(e_1, \dots, e_{n-1}) = \det(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(e_n^*).$$

Ainsi, on observe qu'opérer une antilamination d'un réseau Λ revient à faire une lamination de son dual. Plus précisément,

Proposition 3. La base (e_1, \dots, e_n) du réseau Λ est antilaminée si et seulement si la base (e_n^*, \dots, e_1^*) du dual Λ^* est laminée. En d'autres termes,

$$A_{anti} = \overline{((\overline{A^{-1}})_{HKZ})^{-1}}.$$

Preuve. On procède par double implication.

\Rightarrow Notons (e_1, \dots, e_n) une base antilaminée de Λ , A sa matrice de Gram, et (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale. Soit $F = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{n-1})$ le sous-espace de codimension 1. Comme A est antilaminée, par le lemme 3, e_n^* est un vecteur minimal de $\overline{A^{-1}}$. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_{n-1}) \subset F$ une base de Λ_{n-1} , la base duale de β dans F est donnée par $\beta^* = (p_F(e_1^*), \dots, p_F(e_{n-1}^*))$, par le lemme 2. Comme F est orthogonal à e_n^* , cela revient à projeter orthogonalement Λ^* par rapport à e_n^* . Comme A est antilaminée, $p_F(e_{n-1}^*)$ est un minimum du réseau $p_F(\Lambda^*)$. Ceci correspond à la seconde étape de la réduction d'Hermité de $\overline{A^{-1}}$. En itérant le procédé, on obtient une réduction d'Hermité (faible) de $\overline{A^{-1}}$.

\Leftarrow Soit (e_1, \dots, e_n) une base de Λ telle que $\overline{A^{-1}} = \overline{\text{Gram}(e_1^*, \dots, e_n^*)}$ soit réduite au sens d'Hermité faible. Alors e_n^* est un vecteur minimal du dual de Λ . Ceci correspond à la première étape de l'antilamination de Λ . Comme la base duale de (e_1, \dots, e_n) dans $F = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est la projection orthogonale de Λ^* sur F par rapport à e_n^* , on obtient que $p_F(e_{n-1}^*)$ est un vecteur minimal du projeté $p_F(\Lambda^*)$ (car $\text{Gram}(\Lambda^*)$ est réduite au sens HKZ). Ainsi, par récurrence sur le rang n du réseau, on vérifie que la base (e_1, \dots, e_n) est antilaminée. \square

3.3 Fonction γ'''

Définition. Soit Λ un réseau de E , soit A une matrice de Gram antilaminée. Considérons alors la décomposition en somme de carrés de la forme quadratique associée

$${}^t x A x = B_1(x_1 + \beta_{12}x_2 + \dots + \beta_{1n}x_n)^2 + B_2(x_2 + \beta_{23}x_3 + \dots + \beta_{2n}x_n)^2 + \dots + B_n x_n^2$$

Pour le réseau Λ , on définit les constantes :

$$\gamma_+'''(\Lambda) = \max_{anti(\Lambda)} \sqrt{\frac{B_1}{B_n}} \quad \gamma_-'''(\Lambda) = \min_{anti(\Lambda)} \sqrt{\frac{B_1}{B_n}}.$$

où max et min portent sur toutes les antilaminations du réseau Λ .

A l'instar de $\gamma_{\pm}''(\Lambda)$, les fonctions $\gamma_{\pm}'''(\Lambda)$ sont bornées. Par définition, les constantes $\gamma_{n,+}'''$ et $\gamma_{n,-}'''$ sont les bornes supérieures des fonctions $\gamma_+'''(\Lambda)$ et $\gamma_-'''(\Lambda)$ prises sur tous les réseaux Λ de E .

$$\gamma_{n,+}''' = \sup_{\Lambda} (\gamma_+'''(\Lambda)) \quad \gamma_-''' n = \sup_{\Lambda} (\gamma_-'''(\Lambda)).$$

Lemme 4.

$$\gamma_+'''(\Lambda) = \max_{anti(\Lambda)} \sqrt{B_1} \cdot \|\Lambda^*\| \quad \text{et} \quad \gamma_-'''(\Lambda) = \min_{anti(\Lambda)} \sqrt{B_1} \cdot \|\Lambda^*\|$$

Preuve. Par le lemme 3, nous avons

$$\det(e_1, \dots, e_{n-1}) = \det(e_1, \dots, e_n) \cdot \|e_n^*\|^2$$

D'autre part, nous avons

$$\det(e_1, \dots, e_n) = \det(e_1, \dots, e_{n-1}) \cdot B_n$$

D'où $B_n = \|\Lambda^*\|^{-2}$. □

Lemme 5.

- i) Soit (e_1, \dots, e_n) une base antilaminée réalisant la valeur de $\gamma_+'''(\Lambda)$ (respectivement $\gamma_-'''(\Lambda)$). Alors, (e_1, \dots, e_k) est une base antilaminée de la section Λ_k réalisant la valeur de la constante $\gamma_+'''(\Lambda_k)$ (ou celle de $\gamma_-'''(\Lambda_k)$).
- ii) La projection sur l'orthogonal de (e_1, \dots, e_k) des vecteurs e_j , $j \geq k+1$, fournit une base antilaminée du réseau $\Lambda^{(k+1)}$. Remarquons cependant que cette antilamination ne conduit pas nécessairement aux valeurs $\gamma_{n-k,\pm}'''(\Lambda^{(k+1)})$.

Preuve. Il suffit de prouver ii). Regardons la première étape de l'antilamination du réseau $\Lambda^{(k+1)}$. On vérifie que $\langle e_{k+1}^{(k+1)}, \dots, e_{n-1}^{(k+1)} \rangle$ est une section de rang $n-k-1$ de déterminant minimal. En effet par orthogonalité de la projection, on a

$$\det(e_1, \dots, e_{n-1}) = \det(e_1, \dots, e_k) \cdot \det(e_{k+1}^{(k+1)}, \dots, e_{n-1}^{(k+1)})$$

On conclut par minimalité de $\det(e_1, \dots, e_{n-1})$. □

3.4 Relation entre γ'' et γ'''

Proposition 4. Soit Λ un réseau de E , soit Λ^* son dual. On a l'équivalence

$$\gamma_{n,\pm}'''(\Lambda) = \gamma_{n,\pm}''(\Lambda^*).$$

Preuve. Nous avons vu que toute matrice de Gram antilaminée A du réseau Λ est telle que la matrice $\overline{A^{-1}}$ est une matrice de Gram réduite au sens d'Hermité de Λ^* , et vice-versa. Notons encore (e_1, \dots, e_n) la base antilaminée associée à la matrice de Gram A et (e_n^*, \dots, e_1^*) celle attachée à la matrice $\overline{A^{-1}}$.

Les décompositions de Gauss-Lagrange respectives sont

$${}^t x A x = B_1(x_1 + \beta_{12}x_2 + \dots + \beta_{1n}x_n)^2 + \dots + B_n x_n^2,$$

$${}^t y \overline{A^{-1}} y = A_1(y_1 + \alpha_{12}y_2 + \dots + \alpha_{1n}y_n)^2 + \dots + A_n y_n^2.$$

Montrons alors que

$$[B_1, B_2, \dots, B_n] = \left[\frac{1}{A_n}, \frac{1}{A_{n-1}}, \dots, \frac{1}{A_1} \right],$$

Ce qui entraîne en particulier que $\frac{B_1}{B_n} = \frac{A_1}{A_n}$, prouvant la proposition.
Par le lemme 3,

$$\det(e_1, \dots, e_r) = \det(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(e_n^*, \dots, e_{r+1}^*)$$

entraînant

$$B_{r+1} \cdots B_n A_1 \cdots A_{n-r} = 1$$

pour tout r avec $1 \leq r \leq n-1$. □

Conséquence.

$$\gamma_{n,\pm}''' \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)/2}.$$

3.5 Constantes γ'' et γ''' des réseaux E_6 , E_7 et E_8

Appliquons les résultats précédents aux réseaux fortement laminés de dimension inférieure à 8 [5], qui sont

$$\sqrt{2}\mathbb{Z}, A_2, A_3, D_4, D_5, E_6, E_7 \text{ et } E_8.$$

Comme ces réseaux sont extrêmes, on obtient une lamination du réseau E_8 , en considérant la base provenant directement de cette famille. Les coefficients externes de la lamination de E_8

$$\left[2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 1, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

sont obtenus par comparaison des déterminants de ces réseaux, à savoir 2, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 1. Comme E_8 est unimodulaire et que les coefficients externes satisfont la symétrie $A_i = \frac{1}{A_{9-i}}$, cette lamination est également une antilamination de E_8 . Vu que le groupe des automorphismes de chacun de ces réseaux agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs minimaux de son dual, chacun possède une unique section de codimension 1 de déterminant minimal. Il n'existe donc, à isométrie près, qu'une lamination ou antilamination de E_8 .

$$\gamma_{\pm}''(E_6) = \gamma_{\pm}'''(E_6) = \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad \gamma_{\pm}''(E_7) = \gamma_{\pm}'''(E_7) = \sqrt{3}$$

$$\text{et } \gamma_{\pm}''(E_8) = \gamma_{\pm}'''(E_8) = 2.$$

Un calcul similaire peut être fait pour le réseau de Leech Λ_{24} . Mais celui-ci ne fournit que la valeur des fonctions

$$\gamma_{-}''(\Lambda_{24}) = \gamma_{-}'''(\Lambda_{24}) = 4 = \gamma(\Lambda_{24}) = \gamma'(\Lambda_{24}).$$

La valeur de γ_{+}'' est inconnue et pourrait dépasser 4.

4 Quelques propriétés

Propriété 1. Pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$\gamma_{n,+}'' \leq \gamma_{k,+}'' \cdot \gamma_{n-k+1,+}'' , \text{ et } \gamma_{n,-}'' \leq \gamma_{k,+}'' \cdot \gamma_{n-k+1,-}'' .$$

Preuve. On montre que quel que soit le réseau Λ de l'espace euclidien E , $\gamma_{\pm}''(\Lambda) \leq \gamma_{k,+}'' \cdot \gamma_{n-k+1,\pm}''$. En effet, soit $(e_1, \dots, e_k, \dots, e_n)$ une base du réseau réalisant la valeur de $\gamma_+''(\Lambda)$ (respectivement $\gamma_-''(\Lambda)$). Notons Λ_k le sous-réseau engendré par (e_1, \dots, e_k) et $\Lambda^{(k)}$ le k -ième projeté de Λ . D'après le lemme 1, (e_1, \dots, e_k) est une lamination de Λ_k et $(e_k^{(k)}, \dots, e_n^{(k)})$ une lamination de $\Lambda^{(k)}$ réalisant la valeur de $\gamma_+''(\Lambda^{(k)})$ (resp. $\gamma_-''(\Lambda^{(k)})$). Alors,

$$\gamma_{\pm}''\Lambda = \frac{\|\Lambda^{(1)}\|}{\|\Lambda^{(n)}\|} \leq \frac{\|\Lambda^{(1)}\|}{\|\Lambda^{(k)}\|} \cdot \frac{\|\Lambda^{(k)}\|}{\|\Lambda^{(n)}\|} \leq \gamma_+''(\Lambda_k) \gamma_{\pm}''(\Lambda^{(k)}) \leq \gamma_{k,+}'' \gamma_{n-k+1,\pm}'' .$$

□

Conséquence. En appliquant la propriété précédente à $n = 2k - 1$, on obtient

$$\gamma_{2k-1,\pm}'' \leq (\gamma_{k,+}'')^2 .$$

Rappel. L'invariant d'Hermitte dual γ' d'un réseau Λ de E et la constante d'Hermitte duale, introduits par A.-M. Bergé et J. Martinet [3, 11], sont définis par

$$\gamma'(\Lambda) = \|\Lambda\| \|\Lambda^*\| , \quad \gamma'_n = \sup_{\Lambda} (\gamma'(\Lambda)) .$$

Propriété 2. Pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité

$$\gamma'(\Lambda) \leq \gamma_{\pm}''(\Lambda) ,$$

et donc

$$\gamma'_n \leq \gamma_{n,\pm}'' .$$

Preuve. On fait appel à l'antilamination du réseau Λ . Nous avons vu que $\gamma_{\pm}'''(\Lambda) = \sqrt{B_1} \|\Lambda^*\|$. Alors,

$$\gamma_{\pm}'''(\Lambda) = \sqrt{B_1} \|\Lambda^*\| \geq \|\Lambda\| \|\Lambda^*\| = \gamma'(\Lambda) .$$

Pour γ'' , on conclut par $\gamma'(\Lambda) = \gamma'(\Lambda^*)$. □

Propriété 3. Pour tout nombre entier n supérieur à 2, on a

$$\gamma_{n,\pm}'' \geq \sqrt{\frac{\gamma_n^n}{\gamma_{n-1}^{n-1}}} .$$

Preuve. C'est une conséquence de la propriété 2 et de l'inégalité analogue pour γ' (cf. [3]; 2.6(i) avec $k = 1$). □

Propriété 4. pour tout entier $n \geq 1$, nous avons

$$\gamma_n^{n/2} \leq \gamma_{2,\pm}''' \cdots \gamma_{n,\pm}''' .$$

Preuve. Itérer sur le rang n du réseau Λ l'inégalité de la propriété 3. □

Propriété 5. La fonction $\gamma''_{n,+}$ est croissante en n . En d'autres termes,

$$\forall n, \quad \gamma''_{n+1,+} \geq \gamma''_{n,+} .$$

Preuve. Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^n . Construisons un réseau $\tilde{\Lambda}$ de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\gamma''_+(\tilde{\Lambda}) \geq \gamma''_+(\Lambda)$. Notons (e_1, \dots, e_n) la base orthonormée de \mathbb{R}^n et (e_1, \dots, e_{n+1}) celle de \mathbb{R}^{n+1} . Quitte à user d'une homothétie, supposons que le réseau Λ soit de minimum 1. Considérons alors le réseau $\tilde{\Lambda}$ somme directe orthogonale du réseau Λ et de $\mathbb{Z}e_{n+1}$. Alors $\gamma''_+(\tilde{\Lambda}) \geq \gamma''_+(\Lambda)$. En effet, e_{n+1} est un vecteur minimal de $\tilde{\Lambda}$, au même titre que ceux de Λ . On peut donc choisir e_{n+1} comme premier vecteur de base lors de la réduction d'Hermite de $\tilde{\Lambda}$. En projetant sur le plan orthogonal à e_{n+1} , on obtient le réseau Λ . En continuant le procédé de réduction par les choix des minimaux de Λ qui mènent à $\gamma''_+(\Lambda)$, on a

$$\gamma''_+(\tilde{\Lambda}) \geq \frac{\|e_{n+1}\|}{\|\Lambda^{(n)}\|} = \frac{\|\Lambda\|}{\|\Lambda^{(n)}\|} = \gamma''_+(\Lambda) .$$

où $\Lambda^{(n)}$ désigne le n -ième projeté du réseau Λ . □

Propriété 5bis. La fonction $\gamma''_{n,-}$ est croissante en n . C'est-à-dire

$$\forall n, \quad \gamma''_{n+1,-} \geq \gamma''_{n,-} .$$

Preuve. La preuve de la propriété 5 ne s'applique pas sans modification. En effet, pour le réseau $\tilde{\Lambda}$, on a $\gamma''_-(\tilde{\Lambda}) = \min(1, \gamma''_-(\Lambda))$. On construit alors une suite de réseaux ${}_j\tilde{\Lambda}$ de \mathbb{R}^{n+1} , indexée par $j \in \mathbb{N}$, telle que la suite $\gamma''_-({}_j\tilde{\Lambda})$ converge vers $\gamma''_-(\Lambda)$. En reprenant les notations précédentes, considérons la famille ${}_j\tilde{\Lambda} = (1 - \frac{1}{j})\mathbb{Z}e_{n+1} \oplus \Lambda$. Ce qui force à prendre $(1 - \frac{1}{j})e_{n+1}$ comme premier vecteur de la lamination. On obtient,

$$\gamma''_-({}_j\tilde{\Lambda}) = \frac{1 - \frac{1}{j}}{\sqrt{A_n}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{A_n}} = \gamma''_-(\Lambda)$$

où A_n est le dernier coefficient externe de la réduction HKZ de Λ . □

Remarques

- i) Pour des réseaux dont la constante γ''_+ est supérieure ou égale à 1, cette construction n'augmente pas la valeur de γ''_+ . Seuls ceux dont γ''_+ est inférieure à 1, passent à la valeur 1.
- ii) Il est bon de rappeler qu'à l'heure actuelle, on ne sait pas si la fonction d'Hermite γ est croissante. Seuls des résultats asymptotiques sont disponibles.

Propriété 6.

$$\gamma_n^{n/2} \leq (\gamma''_{n,-})^{n-1} .$$

Preuve. Combiner les propriétés 4 et 5bis. □

Propriété 7. Pour n un naturel pair, on a

$$\gamma''_{n,\pm} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-2}{8}} \gamma_n .$$

Pour n impair, on a

$$\gamma''_{n,\pm} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-2}{8} + \frac{1}{8n}} \gamma_n .$$

Preuve. Soit ${}_j\Lambda$ une famille de réseaux de E dont la suite de constantes $\gamma''_+({}_j\Lambda)$ tendent vers la valeur $\gamma''_{n,+}$. Alors, à la limite, le coefficient externe A_1 est supérieur ou égal aux autres coefficients externes. Sinon, cela contredirait la croissance de la fonction γ'' . Rappelons encore que lors d'une réduction d'Hermite, les relevés des projetés satisfont

$$\|e_k^{(k-1)}\| \leq \sqrt{\frac{4}{3}} \|e_k^{(k)}\| .$$

Soit (e_1, \dots, e_n) une base réduite au sens d'Hermite. Par les deux remarques précédentes, on peut écrire, pour n pair

$$\sqrt{\det(\Lambda)} = \|e_1^{(1)}\| \cdot \|e_2^{(2)}\| \cdots \|e_n^{(n)}\| \leq \|e_1^{(1)}\|^{n/2} \cdot \|e_n^{(n)}\|^{n/2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)\frac{1}{4}}$$

d'où

$$\|e_1^{(1)}\| \cdot \|e_n^{(n)}\| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{8}} \cdot \det(\Lambda)^{\frac{1}{n}}$$

Ainsi

$$\gamma''_{n,+} = \frac{\|e_1^{(1)}\|}{\|e_n^{(n)}\|} = \frac{\|\Lambda\|^2}{\|e_1^{(1)}\| \cdot \|e_n^{(n)}\|} \leq \frac{\|\Lambda\|^2}{\det(\Lambda)^{1/n}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-2}{8}} .$$

Pour n impair, on procède de même en écrivant

$$\sqrt{\det(\Lambda)} = \|e_1^{(1)}\| \cdots \|e_{(n-1)/2}^{((n-1)/2)}\| \cdot \|e_{(n+1)/2}^{((n+1)/2)}\|^{1/2} \cdot \|e_{(n+1)/2}^{((n+1)/2)}\|^{1/2} \cdots \|e_n^{(n)}\| .$$

□

Propriété 8. On a l'inégalité asymptotique

$$\gamma''_{n,\pm} \leq n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln n} .$$

Preuve. En traduisant dans nos notations la proposition 4.2 de [10], on obtient : soit (e_1, \dots, e_n) une base réduite au sens d'Hermite du réseau Λ de E . Notons A_1, \dots, A_n les coefficients externes associés. Alors

$$A_i \geq \|\Lambda\|^2 \cdot i^{-(i+\ln i)} \quad \forall 1 \leq i \leq n .$$

Ce qui montre que

$$\gamma''_+(\Lambda) = \frac{A_1}{A_n} \leq \frac{\|\Lambda\|^2}{\|\Lambda\|^2} \cdot n^{1+\ln n} \quad \text{pour tout réseau } \Lambda \text{ de rang } n .$$

□

Remarque. Contrairement à la constante γ pour laquelle on connaît une inégalité asymptotique linéaire en n , on doit ici se satisfaire d'une inégalité exponentielle. Cela découle du fait que nous ne sommes pas encore capables de prouver que $\gamma''_{n,\pm} \leq \gamma_n$, bien que nous soyons intimement convaincus. Remarquons cependant qu'il existe des réseaux Λ pour lesquels les constantes $\gamma''_{\pm}(\Lambda)$ sont supérieures à la constante $\gamma(\Lambda)$.

5 Discontinuité

Il est bien connu que les fonctions γ et γ' sont continues. Ceci permet par un argument de compacité, de montrer que les bornes sont atteintes. Ce phénomène ne se produit pas pour les fonctions γ''_{\pm} et γ'''_{\pm} . En effet dès la dimension 3, on verra que ces fonctions sont discontinues. Une étude locale est donc sans objet.

5.1 Cas des dimensions un et deux

Proposition 5. Pour $n = 1, 2$ les fonctions γ''_{\pm} (respectivement γ'''_{\pm}) sont continues et coïncident avec les fonctions γ et γ' .

Preuve. Le cas $n = 1$ est trivial. En dimension 2, on observe que pour tout réseau Λ , on a

$$\gamma''_{\pm}(\Lambda) = \gamma'''_{\pm}(\Lambda) = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} = \frac{\|\Lambda\|}{\sqrt{A_1 A_2}} = \frac{\|\Lambda\|}{\sqrt{\det(\Lambda)}} = \gamma(\Lambda) = \gamma'(\Lambda)$$

qui sont continues. □

Corollaire. Les valeurs de $\gamma''_{2,\pm}$ et $\gamma'''_{2,\pm}$ sont $\sqrt{\frac{4}{3}}$, atteintes sur le réseau hexagonal A_2 .

5.2 Dimensions trois et plus

Reprenons la famille de réseaux de la propriété 5bis. La famille de réseaux ${}_j\tilde{\Lambda}$ converge vers le réseau $\mathbb{Z} \oplus \Lambda$ lorsque j tend vers l'infini. On a vu que la fonction $\gamma''_{\pm}({}_j\tilde{\Lambda})$ converge vers $\gamma''_{\pm}(\Lambda)$. Par contre on montre aisément que $\gamma''_{\pm}(\mathbb{Z} \oplus \Lambda) = 1$, qui est en général différent de $\gamma''_{\pm}(\Lambda)$. Ceci prouve la discontinuité de la fonction γ''_{\pm} .

Regardons plus en détail, le cas de la famille $\Lambda(\varepsilon) = A_2 \oplus (\sqrt{2+\varepsilon})\mathbb{Z}$, $-2 < \varepsilon$, de forme quadratique $2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + (2+\varepsilon)x_3^2$. On observe que pour ε négatif, le minimum du réseau est $(2+\varepsilon)$, tandis que pour ε positif, il est 2. Ainsi suivant la valeur du paramètre ε , on est obligé de choisir le minimum dans la composante orthogonale de $(\sqrt{2+\varepsilon})\mathbb{Z}$ ou de A_2 . On obtient

$$\gamma''_{\pm}(\Lambda(\varepsilon)) = \sqrt{\frac{4+2\varepsilon}{3}} \quad \text{pour } \varepsilon < 0 \quad \text{et} \quad \gamma''_{\pm}(\Lambda(\varepsilon)) = \sqrt{\frac{2}{2+\varepsilon}} \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

Pour $\varepsilon = 0$, nous avons $\gamma''_-(\Lambda(0)) = 1$ et $\gamma''_+(\Lambda(0)) = \sqrt{\frac{4}{3}}$. On observe un saut au point $\varepsilon = 0$, comme l'illustre la figure 3.

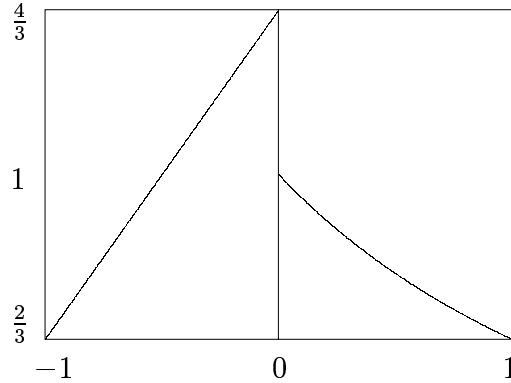


Fig 3 : Discontinuité pour la famille $\Lambda(\varepsilon)$.

Remarque. Notons que pour ε négatif, les fonctions γ''_{\pm} sont supérieures à la fonction d'Hermite γ , et que les rôles s'inversent pour ε positif. Enfin pour $\varepsilon \in]-2, -\frac{1}{2}]$ et pour ε positif, les fonctions γ''_{\pm} et γ' sont confondues. Par contre pour $\varepsilon \in]-\frac{1}{2}, 0[$, γ' vaut 1 et est donc inférieure aux fonctions γ''_{\pm} .

Les discontinuités des fonctions γ''_{\pm} , se produisent au moment précis où le "kissing number" de la famille de réseaux $\Lambda(\varepsilon)$ admet son maximum. Ce phénomène se reproduit, évidemment, pour des dimensions supérieures. Mais il faut noter que cette discontinuité peut ne prendre source qu'à partir d'un des projetés de ce réseau, comme dans l'exemple suivant. Plongeons le réseau $\Lambda(0)$ dans \mathbb{R}^4 , et notons e_1, e_2, e_3 l'image de la base de $\Lambda(0)$, et e_4 un vecteur normé orthogonal à $\Lambda(0)$. Considérons le réseau

$$\mathbb{Z}(e_1 + \alpha_1 e_4) + \mathbb{Z}(e_2 + \alpha_2 e_4) + \mathbb{Z}(e_3 + \alpha_3 e_4) + \mathbb{Z}e_4 .$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont réels. En prenant α_1 et α_3 non nuls, on obtient un réseau indécomposable dont l'ensemble des vecteurs minimaux est restreint à $\pm e_4$. En projetant sur le plan perpendiculaire à e_4 , on retombe sur le réseau $\Lambda(0)$. Ainsi, la discontinuité se produit au moment où le "kissing number" du second projeté atteint son maximum.

Certes, ces différents exemples proviennent de réseaux décomposables où tout à été fait pour produire cette discontinuité. Il est donc utile de savoir que dans des situations rigides comme un chemin de Voronoï entre deux formes parfaites, des discontinuités apparaissent comme le montrent les exemples ci-après.

Les chemins de Voronoï entre les formes D_n et A_n pour $n \geq 6$. Considérons la paramétrisation de l'unique chemin de Voronoï entre les

formes parfaites D_n et A_n , pour $n \geq 6$, donnée par

$$\Lambda(r) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 2 & r \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & r & 2 \end{pmatrix}$$

avec r compris entre 0 et 1. Cette matrice est une lamination de la famille pour $r \geq \frac{n-4}{2(n-1)}$ réalisant la valeur de $\gamma''_+(\Lambda(r))$. On peut montrer que la fonction γ''_+ admet un maximum de $\frac{3n}{4(n-1)}$ au point $r = \frac{n-4}{2(n-1)}$. Ce résultat est aussi valable pour la dimension 5. Dès la dimension $n \geq 6$, on observe aussi une discontinuité pour γ''_+ en $r = \frac{n-5}{2(n-2)}$, qui est exactement l'endroit du maximum en dimension $n-1$. Par contre, la fonction γ''_- coïncide avec γ' et est donc continue sur le chemin de Voronoï. Comme nous le montre la figure 4, $\gamma''_{\pm}(\Lambda(r))$ est inférieure à $\gamma(\Lambda(r))$. Dans tous les cas, la réduction d'Hermite peut commencer par les trois premiers vecteurs de la base ci-dessus. Ce qui montre que la discontinuité de γ''_+ est la conséquence du choix d'un vecteur minimal dans le quatrième projeté du réseau.

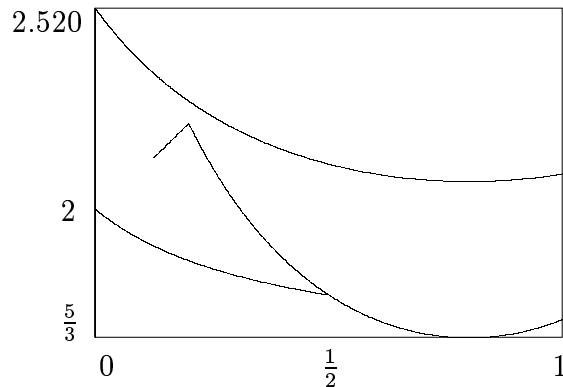


Fig 4 : Discontinuité sur le chemin de Voronoï entre D_6 et A_6 .
De haut en bas, γ^2 , $(\gamma''_+)^2$, et $(\gamma''_-)^2 = (\gamma')^2$.

6 Résultats numériques et conjecture

Les valeurs de la fonction $\gamma''_{n,+}$ ne sont actuellement connues que pour les dimensions n inférieures ou égales à 4. Dès la dimension 5 nous ne connaissons pas la valeur de cette fonction. Nous avons par contre quelques inégalités. Dans cette section, nous rappelons les résultats obtenus par Korikine et Zolotareff et les généralisons pour la fonction $\gamma''_{n,-}$. Ces résultats s'appliquent évidemment aux fonctions $\gamma'''_{n,\pm}$ en considérant les réseaux duaux. Le cas de la dimension $n = 1$ est trivial et sans intérêt. Le cas de la dimension 2 a déjà été traité dans la section 4. Nous avons établi que

Théorème 1. Pour $n = 2$, les constantes $\gamma''_{2,\pm}$ et $\gamma'''_{n,\pm}$ prennent la valeur $\sqrt{\frac{4}{3}}$, atteinte sur le réseau hexagonal A_2 .

6.1 Dimensions 3 et 4

C'est en 1873 que A. Korkine et G. Zolotareff ont montré l'inégalité difficile $\gamma''_{3,+} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ([9], voir également [12]). Ce calcul se fait facilement à l'aide de l'inégalité 3.5 de l'article de H.F. Blichfeldt [4]. Ils ont également établi que cette valeur est atteinte uniquement sur le réseau cubique à faces centrées D_3 et son dual, le réseau cubique centré D_3^* . Notons que la valeur $\gamma''_{3,+} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ coïncide avec la valeur de la constante γ'_3 . Cependant elle est strictement inférieure à celle de $\gamma_3 = \sqrt[3]{2}$.

Théorème 2. (Korkine et Zolotareff [9]) Les coefficients externes d'une réduction d'Hermite (ou lamination) d'une forme quadratique définie positive de rang n satisfont

$$\begin{aligned} A_{i+1} &\geq \frac{4}{3} A_i && \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1, \\ A_{i+2} &\geq \frac{2}{3} A_i && \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-2. \end{aligned}$$

En reprenant ce résultat et en observant que le groupe des automorphismes de D_3 agit transitivement sur les vecteurs minimaux,

Théorème 3. Les constantes $\gamma''_{3,\pm}$ et $\gamma'''_{3,\pm}$ prennent la valeur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ sur le réseau D_3 et son dual D_3^* .

On se propose de donner une démonstration indépendante de celle de Korkine et Zolotareff pour la constante $\gamma''_{3,-}$. Celle-ci se base sur la classification duale des réseaux de dimension 3 due à A.-M. Bergé [1]. Pour un réseau Λ , notons S l'ensemble des vecteurs minimaux et $s = |S|/2$ le demi *Kissing number*, S^* et s^* les analogues pour le dual Λ^* de Λ .

L'invariant γ'' d'une lamination du réseau Λ de rang 3 ne dépend que du premier vecteur minimal $x \in S$ de départ. Notons-le alors γ''_x :

$$\gamma''_x = \sqrt{\min \Lambda \cdot \min(\Lambda^* \cap x^\perp)}$$

x étant fixé, c'est une fonction continue sur l'ensemble des réseaux $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ admettant x comme vecteur minimal.

Proposition 6. On a l'équivalence

$$\gamma''_x = \gamma' \iff \exists y \in S^* \text{ tel que } y \perp x .$$

Mieux, il existe au plus un vecteur minimal $x \in S$ tel que $\gamma''_x > \gamma'$. Cela se produit lorsque $S^* = \{\pm e_i^*\}$ (et donc $s^* = 1$) pour $x = \pm e_i$, $1 \leq i \leq 3$.

Preuve. L'équivalence est triviale par $\gamma''_x = \sqrt{\min \Lambda \cdot \min(\Lambda^* \cap x^\perp)}$. On achève la preuve en passant au crible toutes les classes duales de dimension 3 [1]. \square

Ainsi la fonction γ''_x prend exactement deux valeurs (γ''_+ et $\gamma''_- = \gamma'$) dans quatre classes duales correspondant à $s^* = 1$; à savoir $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ et $(4, 1)$. Dans les 11 autres classes (dont trois avec $s^* = 1$), γ''_- et γ''_+ coïncident avec γ' . Ce qui implique que, dans ce cas, γ''_- et γ' sont confondues.

A.-M. Bergé et J. Martinet ont établi que la constante $\gamma'_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ est atteinte sur les réseaux D_3 et D_3^* , de manière indépendante des travaux de A. Korkine et G. Zolotareff. Ceci fournit une démonstration pour la constante γ''_- .

L'étude de γ''_x dans les quatre classes duales ci-dessus, permet d'obtenir le théorème de Korkine et Zolotareff sans être toutefois significativement plus simple.

Le cas de la dimension 4, se déduit du cas précédent, en utilisant la propriété 1 avec $n = 4$ et $k = 3$.

Théorème 4. Pour la dimension 4, nous avons que $\gamma''_{4,\pm} = \gamma'''_{4,\pm} = \sqrt{2}$. Cette valeur est atteinte uniquement sur le réseau D_4 et son dual D_4^* .

Preuve. Le résultat a été démontré par A. Korkine et G. Zolotareff pour la fonction γ''_+ . On vérifie aisément que le groupe des automorphismes de D_4 agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs minimaux. En effectuant la première projection de la réduction d'Hermite, on tombe sur un réseau isométrique au dual de A_3 . \square

6.2 Dimension 5, une conjecture

Le cas de la dimension 5 n'est actuellement pas résolu. Il est fort probable que A. Korkine et G. Zolotareff aient tenté de prouver que $\gamma''_{5,+} = \sqrt{2}$. Comme nous avons vu dans la première partie, les contre-exemples de Blichfeldt infirment ce résultat. C'est dans cette famille de réseaux que l'on trouve, encore aujourd'hui, le réseau de dimension 5 réalisant la valeur record de la fonction γ''_+ . En utilisant la propriété 1 avec $n = 5$ et $k = 3$, ainsi que la valeur des constantes $\gamma''_{3,+}$, on aboutit à l'inégalité $\gamma''_{5,+} \leq \frac{3}{2}$. A. Korkine et G. Zolotareff ont prouvé que l'inégalité est stricte [9]. Depuis, aucune amélioration de ce résultat n'a été publiée. Certes une étude approfondie, s'inspirant de la méthode de Korkine et Zolotareff en dimension 3, devrait nous permettre d'obtenir la valeur de la constante $\gamma''_{5,+}$. Malheureusement, la complexité et la taille du système d'inégalités rendent sa résolution illusoire. D'un autre côté, une étude locale, comme pour les constante γ et γ' , n'est pas envisageable, vu le caractère discontinu de la fonction γ''_+ . Remarquons cependant que la valeur de γ''_- reste strictement inférieure à $\sqrt{2}$ pour tous les contre-exemples à la conjecture de Korkine et Zolotareff. Ce qui nous conduit à la conjecture :

Conjecture. La valeur de la constante $\gamma''_{5,-}$ est $\sqrt{2}$, valeur atteinte sur les réseaux parfaits D_5 et $H_5 = A_5^3$ ainsi que sur leur duals.

En utilisant la propriété 1 avec le couple $(n, k) = (6, 2)$ (respectivement $(7, 3)$ et $(8, 4)$), et sous l'hypothèse que la conjecture soit vraie, on obtient les inégalités

$$\gamma''_{6,-} \leq \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad \gamma''_{7,-} \leq \sqrt{3}, \quad \gamma''_{8,-} \leq 2.$$

Or, comme nous avons vu au paragraphe 2.5, ces valeurs sont atteintes sur les réseaux E_6 respectivement E_7 et E_8 .

Conséquence 1.

$$\gamma''_{6,-} = \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad \gamma''_{7,-} = \sqrt{3}, \quad \gamma''_{8,-} = 2$$

atteintes sur les réseaux parfaits E_6 et son dual, respectivement E_7 et son dual, et E_8 .

A.-M. Bergé et J. Martinet ont énoncé une conjecture similaire pour la constante γ'_5 ,

Conjecture (Bergé et Martinet [3]). On a $\gamma'_5 = \sqrt{2}$, et cette valeur n'est atteinte que sur les réseaux semblables à D_5 et H_5 et leurs duals.

Cette dernière conjecture est une conséquence directe de la conjecture sur $\gamma''_{5,-}$. En effet par la propriété 2, la valeur de la constante γ' est inférieure à $\gamma''_{n,-}$. Mieux en utilisant la conséquence 1, on obtient immédiatement la valeur des constantes γ'_n pour $n = 5, 6, 7$ et 8 . Remarquons que ces valeurs étaient déjà conjecturées, mais il n'était pas possible de les déduire du cas de dimension 5.

Conséquence 2. On a

$$\gamma'_5 = \sqrt{2}, \quad \gamma'_6 = \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad \gamma'_7 = \sqrt{3}, \quad \gamma'_8 = 2$$

valeurs atteintes sur D_5 et H_5 et leurs duals, respectivement E_6 et E_6^* , E_7 et E_7^* et E_8 .

Revenons à la constante d'Hermite. Les valeurs de cette dernière sont établies jusqu'à la dimension 8. Ces résultats sont une conséquence des travaux de Voronoï sur les formes parfaites. En effet, il a été démontré qu'une forme extrême est parfaite et eutactique. Voronoï a développé un algorithme permettant d'énumérer toutes les formes parfaites de dimension fixée. Il est bon de relever qu'actuellement, nous ne connaissons la liste exhaustive des formes parfaites que jusqu'à la dimension 7 [8]. Pour le cas de la dimension 8, la complexité de l'algorithme dépasse les capacités des ordinateurs actuels.

Cela dit, le nombre de réseaux parfaits croit exponentiellement avec la dimension. En dimension 7, il y a 33 réseaux parfaits, alors que nous connaissons déjà 10916 réseaux parfaits de rang 8. La liste est tenue à jour sur le site "http://www.ufr-mi.u-bordeaux.fr/martinet/". Ces résultats peuvent également s'obtenir à l'aide de la conjecture précédente. Supposons connue la valeur de la fonction $\gamma_4 = \sqrt{2}$. Par la propriété 3, on obtient récursivement en utilisant les valeurs de la fonction $\gamma''_{n,-}$, les constantes γ_5 , γ_6 , γ_7 et aussi γ_8 .

Conséquence 3. On a

$$\gamma_5 = \sqrt[5]{2^3}, \quad \gamma_6 = \frac{2}{\sqrt[6]{3}}, \quad \gamma_7 = \sqrt[7]{2^6}, \quad \gamma_8 = 2.$$

Les conséquences de la conjecture laissent penser que la démonstration sera ardue. A cause de la discontinuité de γ'' les méthodes utilisées pour les constantes γ et γ' ne peuvent pas s'appliquer. Une caractérisation, ou au moins une étude, des points de discontinuité serait profitable, dans l'espoir de mener une analyse locale. Mais comme nous l'avons vu plus haut, il ne suffit pas de connaître la géométrie du réseau pour caractériser les discontinuités, il faut connaître celle de tous ses projetés.

6.3 Les réseaux de racines

Dans cette partie, nous allons étudier les fonctions γ''_{\pm} et γ'''_{\pm} pour les réseaux de racines. Dans un premier temps, nous ne nous consacrerons qu'aux réseaux indécomposables. Le cas des réseaux E_6 , E_7 et E_8 a déjà été traité au paragraphe 2.5. Reste le cas des familles infinies que sont les réseaux A_n , pour $n \geq 2$, et D_n , pour $n \geq 4$. La démonstration des théorèmes suivants sera faite dans l'appendice.

Théorème 5. Pour tout entier $n \geq 2$, il n'existe, à isométrie près, qu'une lamination (respectivement antilamination) des réseaux de racines A_n . Pour cette famille, lamination et antilamination coïncident. La décomposition en somme de carrés de la réduction d'Hermite donne

$$2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \dots + \frac{1}{2}x_n)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{3}x_n)^2 + \dots \\ + \frac{k+1}{k}(x_k + \frac{1}{k+1}x_{k+1} + \dots + \frac{1}{k+1}x_n)^2 + \dots + \frac{n+1}{n}x_n^2.$$

Les constantes γ''_{\pm} et γ'''_{\pm} du réseau A_n sont

$$\gamma''_{\pm}(A_n) = \gamma'''_{\pm}(A_n) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Note. A isométrie près signifie à isométrie près de chacune des projections (respectivement chacune des sections).

Théorème 6. Pour tout entier $n \geq 4$, il existe, à isométrie près, deux laminations des réseaux D_n (sauf pour le réseau D_4 qui n'en admet qu'une seule) et une antilamination. Les deux laminations coïncident avec l'antilamination dont voici la décomposition en somme de carrés

$$2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \dots - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \dots - \frac{1}{3}x_n\right)^2 + \frac{4}{3}\left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \dots - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \sum_{i=5}^n x_i^2.$$

On obtient la seconde lamination du réseau en échangeant le troisième et le quatrième vecteur de base. Sa décomposition de Gauss-Lagrange est

$$2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \dots - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \dots - \frac{1}{3}x_n\right)^2 + \frac{4}{3}\left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 - \dots - \frac{1}{4}x_n\right)^2 + \left(x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \dots - \frac{1}{5}x_n\right)^2 + \sum_{i=6}^n x_i^2.$$

Les constantes γ''_{\pm} et γ'''_{\pm} des réseaux de racines D_n sont donc

$$\gamma''_{\pm}(D_n) = \gamma'''_{\pm}(D_n) = \sqrt{2}.$$

Corollaire Lorsqu'on fait tendre l'entier n vers l'infini, on a

$$\gamma''_{\pm}(A_n) \longrightarrow \sqrt{2} = \gamma''_{\pm}D_n.$$

Considérons un réseau de racines décomposable Λ . Soit $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^k \Lambda_i$ sa décomposition en réseaux de racines irréductibles. Vu la décroissance des coefficients externes d'une lamination (ou antilamination) d'un réseau de racine irréductible, on déduit facilement des résultats ci-dessus la valeur des constantes γ''_{\pm} et γ'''_{\pm} du réseau Λ , via

$$\begin{aligned} \gamma''_{-}(\Lambda) &= \gamma'''_{-}(\Lambda) = \min_{i=1\dots k} \gamma''_{-}(\Lambda_i) = \min_{i=1\dots k} \gamma'''_{-}(\Lambda_i), \\ \gamma''_{+}(\Lambda) &= \gamma'''_{+}(\Lambda) = \max_{i=1\dots k} \gamma''_{+}(\Lambda_i) = \max_{i=1\dots k} \gamma'''_{+}(\Lambda_i). \end{aligned}$$

7 Appendice

Cet appendice est entièrement consacré à la démonstration des deux théorèmes de la section 5.3. Les difficultés de ces preuves ne résident pas dans leur compréhension, mais plutôt dans le choix des bases des réseaux. Nous consacrerons la première partie à la famille A_n , $n \geq 2$ et la seconde à la famille D_n , $n \geq 4$.

7.1 La famille A_n

La démonstration du théorème se fait en deux pas. Le premier pas est consacré à la lamination; le second à l'antilamination. Pour ce dernier, on utilisera la ruse qui consiste à prendre le dual du réseau et d'en considérer sa lamination.

Premier pas. Commençons par un lemme clé pour la résolution.

Lemme 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$, $a > 2b$; considérons le réseau Λ admettant la matrice de Gram suivante

$$\text{Gram}_\Lambda = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

Le minimum de la forme est a et l'ensemble des vecteurs minimaux est $\mathcal{V}_{\min} = \{\pm e_i, 1 \leq i \leq n\}$. La norme suivante est $2a - 2b$, atteinte sur l'ensemble $\{\pm(e_i - e_j), 1 \leq i < j \leq n\}$.

Le groupe des automorphismes de Λ est $\{\pm \mathbb{I}\} \times \mathbb{S}_n$. Il agit transitivement par permutation des vecteurs minimaux du réseaux.

Preuve. Nous procédons par récurrence sur le rang n de Λ , et par une chasse aux "vecteurs courts". Regardons le cas de la dimension 2.

Effectuons une réduction de Gauss-Lagrange du réseau et cherchons les couples (x_1, x_2) tels que

$$a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \underbrace{\left(a - \frac{b^2}{a}\right)}_{\geq 0 \text{ par hyp.}} x_2^2 \leq 2a - 2b.$$

En remontant variable par variable depuis la droite, on obtient tous les candidats satisfaisant à la condition ci-dessus. Faisons-le en détail une fois pour se faire la main.

Pour la variable x_2 , on a

$$x_2^2 \leq \frac{2a - 2b}{a - \frac{b^2}{a}} \leq \frac{2a - 2b}{\frac{3}{4}a} \leq \frac{8}{3}$$

ce qui nous fournit les deux solutions $x_2 = 0$ ou $x_2 = \pm 1$.

La première solution fournit immédiatement $x_1 = \pm 1$ puisque nous cherchons des vecteurs non nuls. La seconde donne l'équation

$$\left(x_1 \pm \frac{b}{a}\right)^2 \leq 1 \pm 2\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a} = \left(\mp 1 + \frac{b}{a}\right)^2$$

dont les solutions sont $x_1 = 0$ ou encore $x_1 \mp 1$.

Finalement, les vecteurs minimaux sont $\pm e_1, \pm e_2$ dont la norme au carré est a et les vecteurs $\pm(e_1 - e_2)$ sont les vecteurs de norme $2a - 2b$.

Supposons vraie la proposition pour le rang $n - 1$.

Effectuons la première étape d'une réduction de Gauss-lagrange

$$a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2 + \dots + \frac{b}{a}x_n\right)^2 + Q(x_2, \dots, x_n) \leq 2a - 2b$$

où Q est la forme quadratique de rang $n - 1$ de matrice

$$\text{Gram}_Q = \begin{pmatrix} a - \frac{b^2}{a} & b - \frac{b^2}{a} & \dots & b - \frac{b^2}{a} \\ b - \frac{b^2}{a} & a - \frac{b^2}{a} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b - \frac{b^2}{a} \\ b - \frac{b^2}{a} & \dots & b - \frac{b^2}{a} & a - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}.$$

Comme $\frac{b - \frac{b^2}{a}}{a - \frac{b^2}{a}} \leq \frac{1}{2}$, la proposition s'applique à la forme Q . On observe alors que le minimum de Q est $a - \frac{b^2}{a}$ et la valeur suivante exactement $2a - 2b$. Ainsi on obtient que les vecteurs minimaux sont $\pm e_i$, $1 \leq i \leq n$ et que les vecteurs $\pm(e_i - e_j)$, $1 \leq i < j \leq n$ sont ceux de norme "suivante".

Vu que les vecteurs minimaux forment une base du réseau, et vu la symétrie de la forme, on montre que le groupe des automorphismes est $\{\pm \mathbb{I}\} \times \mathbb{S}_n$ qui agit par permutation des vecteurs minimaux. \square

Remarques.

- 1) Pour $b = \frac{a}{2}$, on obtient les réseaux A_n . Et on peut par le même procédé déterminer les vecteurs minimaux et le groupe des automorphismes de A_n . C'est cette base que l'on choisit pour mener la démonstration.
- 2) Si $b > \frac{a}{2}$ on se convainc que la matrice Gram_Λ est de minimum $2a - 2b$ atteint sur les vecteurs de la forme $\pm(e_i - e_j)$.

Comme le groupes des automorphismes du réseau A_n agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs minimaux [11], le choix du minimum, lors de la première étape de la réduction HKZ du réseau, n'influe pas sur le premier projeté de A_n . Ce dernier étant un réseau du type mentionné dans le lemme ci-dessus, on en déduit qu'il n'existe à isométrie près qu'une réduction d'Hermite du réseau A_n . Par réduction de Gauss-Lagrange, on obtient

$$2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \dots + \frac{1}{2}x_n)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{3}x_n)^2 + \dots \\ + \frac{k+1}{k}(x_k + \frac{1}{k+1}x_{k+1} + \dots + \frac{1}{k+1}x_n)^2 + \dots + \frac{n+1}{n}x_n^2.$$

D'où on tire que $\gamma''_{n,\pm}(A_n) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$.

Second pas. Pour des raisons esthétiques, nous ne considérerons pas le réseau A_n^* mais un multiple $(n + 1)$ de ce dernier afin que la matrice de Gram du dual reste à coefficients entiers. Par passage à l'inverse, on obtient comme matrice de Gram

$$\text{Gram}_{A_n^*} = \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n \end{pmatrix}.$$

Lemme 7. Les réseaux de la forme ci-dessus sont de minimum n , atteint sur les vecteurs $\pm e_i$, $1 \leq i \leq n$ et sur $v = \sum_{i=1}^n e_i$. Le groupe des automorphismes de A_n^* est $\{\pm \mathbb{I}\} \times \mathbb{S}_{n+1}$ qui agit par permutation des vecteurs minimaux.

Preuve. La preuve suit le schéma de celle du lemme précédent. Exécutons le premier pas de la réduction de Gauss-Lagrange

$$n(x_1 - \frac{1}{n}x_2 - \dots - \frac{1}{n}x_n)^2 + Q(x_2, \dots, x_n) \leq n$$

où Q est la forme quadratique de rang $n - 1$ de matrice de Gram

$$\text{Gram}_Q = \begin{pmatrix} \frac{n^2-1}{n} & -\frac{n+1}{n} & \dots & -\frac{n+1}{n} \\ -\frac{n+1}{n} & \frac{n^2-1}{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n+1}{n} \\ -\frac{n+1}{n} & \dots & -\frac{n+1}{n} & \frac{n^2-1}{n} \end{pmatrix}.$$

On observe que $\text{Gram}_Q = \frac{n+1}{n} \text{Gram}_{A_{n-1}^*}$. Par hypothèse de récurrence et par la remarque, on constate que seuls les minimaux de $\text{Gram}_{A_{n-1}^*}$ peuvent contribuer aux minimaux de A_n^* . Ce qui montre que les vecteurs minimaux de A_n^* sont les $\pm e_i$, $1 \leq i \leq n$, et $v = \sum_{i=1}^n e_i$. Vu que le groupe des automorphismes du dual coïncide avec celui du réseaux, on conclut. \square

L'unicité de la réduction d'Hermité à isométrie près découle du lemme. La réduction de Gauss-Lagrange complète de la forme quadratique associée

$$\begin{aligned} n(x_1 - \frac{1}{n}x_2 - \dots - \frac{1}{n}x_n)^2 + \frac{(n+1)(n-1)}{n} (x_2 - \frac{1}{n-1}x_3 - \dots - \frac{1}{n-1}x_n)^2 - \dots \\ + \frac{(n+1)(n-k+1)}{n-k+2} (x_k - \frac{1}{n-k+1}x_{k+1} - \dots - \frac{1}{n-k+1}x_n)^2 + \dots \\ + \frac{(n+1)}{2} x_n^2. \end{aligned}$$

fournit $\gamma_{\pm}'''(A_n) = \gamma_{\pm}''(A_n^*) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$.

En utilisant la relation reliant les coefficients externes d'une antilamination du réseau aux coefficients externes de la lamination du dual, on montre que l'antilamination coïncide avec la lamination. \square

7.2 La famille D_n , $n \geq 4$

La démonstration du théorème pour les réseaux D_n se fait de manière identique à celle pour A_n .

Premier pas. Afin de faciliter les calculs qui suivent, nous allons considérer la base du réseau D_n , réduite au sens d'Hermité, donnée par la matrice de

Gram

$$\text{Gram}_{D_n} = \begin{pmatrix} & & & 2 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & A_3 & & & & -\mathbb{1} \\ & & & 2 & & & & \\ 2 & \cdots & 2 & 4 & -2 & \cdots & -2 & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & -\mathbb{1} & & & & A_{n-4} \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 2 & & & & \end{pmatrix}.$$

Notons qu'il est possible d'obtenir une base de vecteurs minimaux, réduite au sens d'Hermite, en effectuant le changement de base défini de la manière suivante $e_4 \mapsto (e_4 - e_2)$; $e_i \mapsto e_i$, pour $1 \leq i \leq n, i \neq 4$.

Lemme 8. Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons le réseau Λ''' de \mathbb{R}^n admettant la matrice de Gram

$$\text{Gram}_{\Lambda'''} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 5 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -2 & 1 & \cdots & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le minimum du réseau Λ''' est 4 atteint sur $\pm e_1$. La valeur suivante est 5, réalisée sur e_2, \dots, e_n et sur $\pm(e_1 + e_i)$, $2 \leq i \leq n$. Le groupe des automorphismes de Λ''' est le produit semi-direct $\{\pm 1\}^n \rtimes \mathbb{S}_{n-1}$ qui agit par permutation des $n - 1$ derniers vecteurs de la base et par le remplacement des e_i par $-(e_1 + e_i)$ pour $2 \leq i \leq n$.

Preuve. Comme précédemment, on part à la chasse aux vecteurs courts. Effectuons un début de réduction de Gauss-Lagrange

$$4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \dots - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + 4\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq 5$$

où le projeté est le réseau $4\mathbb{Z}^{n-1}$.

Il est alors évident qu'il n'y a que les vecteurs $\pm e_1$ qui soient de norme 4, et que les éléments e_i et $\pm(e_1 + e_i)$, $2 \leq i \leq n$ sont de norme 5.

Pour le groupe des automorphismes, modulo l'action de $-\mathbb{I}$, le premier vecteur de base doit être envoyé sur lui-même. Pour les $n - 1$ derniers, on peut les permuer à loisir. On finit par observer qu'on peut remplacer e_2 par $-(e_1 + e_2)$ sans modifier les autres vecteurs de base. Quitte à conjuguer par une transposition de \mathbb{S}_{n-1} , on peut le faire pour chacun des e_i , $i \geq 2$. Ainsi le groupe des automorphismes est bien $\{\pm 1\}^n \rtimes \mathbb{S}_{n-1}$. \square

Remarque.

- 1) Le groupe des automorphismes de Λ''' agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs de norme 5.
- 2) Il n'existe à isométrie près qu'une réduction d'Hermite du réseau.

Lemme 9. Soit Λ'' le réseau entier pair de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, de matrice de Gram

$$\text{Gram}_{\Lambda''} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 2 & 4 & -2 & \cdots & \cdots & -2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs minimaux sont $\pm e_i$, $1 \leq i \leq n$, $\pm(-e_1 + e_2)$, et $\pm(e_2 + e_j)$, avec $j \in \{3, \dots, n\}$.

Le groupe des automorphismes est $\{\pm 1\}^n \rtimes \mathbb{S}_{n-1}$ qui agit par permutation des vecteurs $-e_1, e_3, \dots, e_n$ et par le remplacement de ces éléments par respectivement $-e_1 + e_2, -(e_2 + e_3), \dots, -(e_2 + e_n)$.

Il y a deux orbites pour l'action du groupe des automorphismes sur les vecteurs minimaux. La première se compose de $\pm e_2$ et la seconde englobe tous les autres vecteurs minimaux.

Preuve. Faisons le premier pas de la réduction de Gauss-Lagrange de la forme

$$4(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \dots - \frac{1}{4}x_n)^2 + \frac{3}{4}Q(x_2, \dots, x_n) \leq 4$$

où Q est la forme quadratique associée au réseau Λ''' de rang $n - 1$ du lemme 1. Par ce lemme, on distingue 2 cas : celui du vecteur minimal de Q et celui des vecteurs de longueur 5. Les vecteurs de longueur supérieure à 6 ne pouvant pas fournir des minimaux de Λ'' . En égrainant ces cas, on obtient la liste des vecteurs minimaux de Λ'' .

Pour le groupe des automorphismes, vu la forme de la matrice de Gram, on voit que le groupe \mathbb{S}_{n-1} agit sur les éléments $-e_1, e_3, \dots, e_n$. Notons encore $v_1 = -e_1 + e_2$ et $v_j = -(e_2 + e_j)$, pour $j \geq 3$, les autres vecteurs minimaux (sauf e_2). On montre facilement qu'on peut envoyer par une isométrie i la base (e_1, e_2, \dots, e_n) sur $(-e_1 + e_2, e_2, \dots, e_n)$. Quitte à conjuguer l'isométrie i par une transposition de \mathbb{S}_{n-1} , on peut également échanger les vecteurs e_j par $-(e_2 + e_j)$ pour $j \geq 3$. Comme $(e_2|e_i) = \pm 2$ et $(e_2|v_i) = \pm 2$ pour $i = 1, 3, \dots, n$, il est impossible d'envoyer e_1 sur e_2 par une isométrie. Ce qui nous fournit le groupe des automorphismes annoncé, puisqu'il reste encore l'action de $\pm \mathbb{I}$. L'orbite de e_1 contient tous les vecteurs minimaux à l'exception de e_2 qui est seul dans son orbite.

En projetant sur e_2^\perp le réseau Λ'' on obtient par réduction de Gauss-Lagrange

$$4(x_2 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \dots - \frac{1}{2}x_n)^2 + \frac{3}{4}Q'(x_1, x_3, \dots, x_n)$$

où Q' correspond au réseau $4\mathbb{Z}^{n-1}$ qui n'est pas isométrique à Λ''' . \square

Remarque. Il existe deux réductions d'Hermite à isométrie près. Cependant toutes deux mènent à la même constante γ''_{\pm} .

Lemme 10. Soit $n \geq 3$ un entier. Soit Λ' le réseau de \mathbb{R}^n de matrice de Gram

$$\text{Gram}_{\Lambda'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 & \cdots & \cdots & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & \cdots & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des vecteurs minimaux est

$$\{\pm e_1, \pm e_2, \pm(-e_1 + e_3), \pm(-e_2 + e_3), \pm e_j, \pm(e_3 + e_j) : 4 \leq j \leq n\}$$

de cardinalité $4(n-1)$.

Le groupe des automorphismes $\text{Aut}(\Lambda')$ s'identifie à $\{\pm 1\}^n \rtimes \mathbb{S}_{n-1}$. Il agit par permutation sur l'ensemble $\{-e_1, -e_2, e_4, \dots, e_n\}$ et par le remplacement de e_1, e_2 (respectivement e_4, \dots, e_n) par $-e_1 + e_3, -e_2 + e_3$ (respectivement $-(e_3 + e_4), \dots, -(e_3 + e_n)$). Il agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs minimaux.

Preuve. Comme précédemment, effectuons un pas de la réduction de Gauss-Lagrange de la forme

$$3(x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \dots - \frac{1}{3}x_n)^2 + \frac{2}{3}Q(x_2, \dots, x_n) \leq 3$$

où $Q(x_2, \dots, x_n)$ est la forme quadratique rattachée au réseau Λ'' du lemme 2. Vu que le réseau Λ'' est pair, on remarque que seuls les vecteurs minimaux de Λ'' peuvent contribuer aux minima de Λ' (car $\frac{2}{3}6 = 4 > 3$). En considérant chaque minimum de Λ'' , on le remonte en un unique vecteur minimal de Λ' , ce qui fournit, en y adjoignant $\pm e_1$, la liste des minimaux.

Comme les vecteurs minimaux engendrent le réseau, chaque isométrie est caractérisée par son action sur l'ensemble des minimaux. Par les propriétés de régularités de la matrice de Gram, on voit que le groupe \mathbb{S}_{n-1} agit en permutant les vecteurs $-e_1, -e_2, e_4, \dots, e_n$. On définit alors l'isométrie i qui envoie la base (e_1, \dots, e_n) sur $-e_1 + e_3, e_2, \dots, e_n$. En conjuguant i par une transposition du groupe \mathbb{S}_{n-1} , on obtient toutes les isométries qui fixent e_3 . Reste encore la symétrie centrale $-\mathbb{I}$. Le groupe des automorphismes est donc $\{\pm 1\}^n \rtimes \mathbb{S}_{n-1}$. Il agit transitivement sur les minima. \square

Remarque. Il n'existe à isométrie près que deux réductions d'Hermité du réseau réalisant toutes deux la même valeur de la constante γ''_{\pm} .

Revenons aux réseaux D_n . Nous traiterons le cas du réseau D_4 à part. Prenons donc $n \geq 5$. Comme $\text{Aut}(D_n)$ agit transitivement sur les vecteurs minimaux, il n'y a qu'un seul choix possible. Le premier projeté est alors Λ' . Par les lemmes 10, 9 et 8, on montre qu'il existe 2 réductions d'Hermité des réseaux D_n . La première donnant successivement $D_n, \Lambda', \Lambda'', \Lambda'''$, et \mathbb{Z}^{n-4} .

La seconde donnant $D_n, \Lambda', \Lambda'', \mathbb{Z}^{n-3}$ dont les réduction de Gauss-Lagrange sont respectivement

$$2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \dots - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \dots - \frac{1}{3}x_n\right)^2 \\ + \dots + \frac{4}{3}\left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 - \dots - \frac{1}{4}x_n\right)^2 + \left(x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \dots - \frac{1}{5}x_n\right)^2 + \sum_{i=6}^n x_i^2.$$

et par le changement de base $e_3 \leftrightarrow e_4$

$$2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \dots - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \dots - \frac{1}{3}x_n\right)^2 \\ + \dots + \frac{4}{3}\left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \dots - \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \sum_{i=5}^n x_i^2$$

Dans les deux cas, les constantes $\gamma''_{n,\pm}(D_n) = \sqrt{2}$.

Le cas de la dimension 4 se traite de manière similaire. On obtient successivement les réseaux $D_4, \Lambda', A_2, \mathbb{Z}$. Il n'y a, dans ce cas, qu'une réduction d'Hermité. Sa décomposition en somme de carrés est

$$2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4\right)^2 + \frac{4}{3}\left(x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 + x_4^2$$

qui mène aux constantes $\gamma''_{\pm}(D_4) = \sqrt{2}$.

Second pas. Notons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de \mathbb{Z}^n . Comme le réseau D_n est paire, son dual D_n^* contient $\mathbb{Z}^n \amalg \{e\} \oplus \mathbb{Z}^n$ où $e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. Comme D_n est d'indice 2 dans \mathbb{Z}^n , son dual contiendra \mathbb{Z}^n avec l'indice 2. Ce qui montre que $D_n^* = \mathbb{Z}^n \amalg \{e\} \oplus \mathbb{Z}^n$. On obtient une base agréable du dual, en considérant les n vecteurs

$$e_1 = \varepsilon_1, \dots, e_{n-3} = \varepsilon_{n-3}, e_{n-2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = e, e_{n-1} = \varepsilon_{n-1}, e_n = \varepsilon_n.$$

En amplifiant par 4 la matrice de Gram pour obtenir un réseau entier, on obtient

$$\text{Gram}_{D_n^*} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \ddots & \vdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & n & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 4$ le réseau D_4^* est semblable à D_4 . Nous ne traiterons donc que les cas de dimension supérieures. Dans ces cas, les vecteurs minimaux du dual de D_n sont les $\pm\varepsilon_i$, car $n\frac{1}{4} > 1$. Par dualité, le groupe des automorphismes est $\{\pm 1\} \times \mathbb{S}_n$ qui agit par permutation et changement de signe

des coordonnées de \mathbb{Z}^n . Il est clair qu'il agit transitivement sur les vecteurs minimaux. Ainsi, il n'y a qu'un choix possible lors de la première étape de la réduction d'Hermite. Effectuons donc le premier pas de la réduction de Gauss-Lagrange de la forme associée

$$2(x_1 + \frac{1}{2}x_{n-2})^2 + Q(x_2, \dots, x_n)$$

où $Q(x_2, \dots, x_n)$ est la forme associée au réseau D_{n-1}^* . On procède de même jusqu'à obtenir le réseau D_4^* semblable à D_4 . Ainsi il n'existe qu'une réduction d'Hermite des réseaux D_n^* . En décomposant entièrement en somme de carrés la forme quadratique, on obtient

$$4(x_1 + \frac{1}{2}x_{n-2})^2 + 4(x_2 + \frac{1}{2}x_{n-2})^2 + \dots + 4(x_{n-3} + \frac{1}{2}x_{n-2})^2 \\ + \dots + 3(x_{n-2} + \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}x_n)^2 + \frac{8}{3}(x_{n-1} - \frac{1}{2}x_n)^2 + 2x_n^2.$$

On en tire la valeur $\gamma''_{n,\pm}(D_n^*) = \sqrt{2}$. □

Références

- [1] A-M. BERGÉ, *Minimal vectors of pairs of dual lattices*, J. Number Theory **52** (1995), 284-298.
- [2] A-M. BERGÉ, J. MARTINET, *Sur la constante d'Hermite, étude historique*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1985-1986, exposé 8.
- [3] A-M. BERGÉ, J. MARTINET, *Sur un problème de dualité lié aux sphères en géométrie des nombres*, J. Number Theory **32** (1989), 14-42.
- [4] H.F. BLICHFELDT, *The minimum value of positive quadratic forms in six, seven and eight variables*, Math. Z. **39** (1935), 1-15.
- [5] J.H. CONWAY, N.J.A. SLOANE, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, Grundlehren n° 290, Heidelberg, 1988, ISBN 0-387-98794-0.
- [6] Carl Friedrich GAUSS, *Recherches Arithmétiques (Disquisitiones Arithmeticae)*, Jacques Gabay, reprint 1989.
- [7] Ch. HERMITE, *Lettre à Jacobi*, J. Reine Angew. Math **40** (1850), 261-278.
- [8] D.O. JAQUET-CHIFFELLE, *Énumération complète des classes de formes parfaites en dimension 7*, Ann. Inst. Fourier **43**,1 (1993), 21-55.
- [9] A. KORKINE, G. ZOLOTAREFF, *Sur les formes quadratiques*, Math. Ann. **6** (1873), 366-389.
- [10] J.C. LAGARIAS, H.W. LENSTRA JR., C.P. SCHNORR, *Korkine-zolotarev bases and successive minima of a lattice and its reciprocal lattice*, Combinatorica **10** (1990), 333-348.
- [11] J. MARTINET, *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens*, Masson, 1996, ISBN 2-225-85364-9.

- [12] Ch. ZONG, *Sphere Packings*, Springer-Verlag, Universitext, 1999,
ISBN 0-387-98794-0.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
RUE EMILE ARGAND 11
CH-2007 NEUCHÂTEL
SUISSE
e-mail : marc.gindraux@unine.ch