Graphes à grand tour de taille

Alain VALETTE

10 janvier 2003

1 Introduction

Dans cet article, il sera question de graphes finis, simples (c'est-à-dire sans boucle ni arête multiple), connexes, et k-réguliers (c'est-à-dire : tout sommet a exactement k voisins). Un exemple célèbre est donné à la Figure 1 : c'est le graphe de Petersen, qui est 3-régulier.

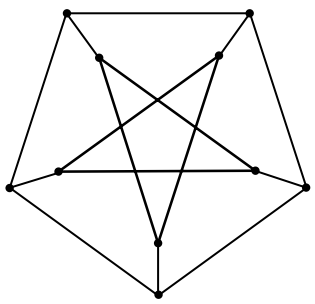


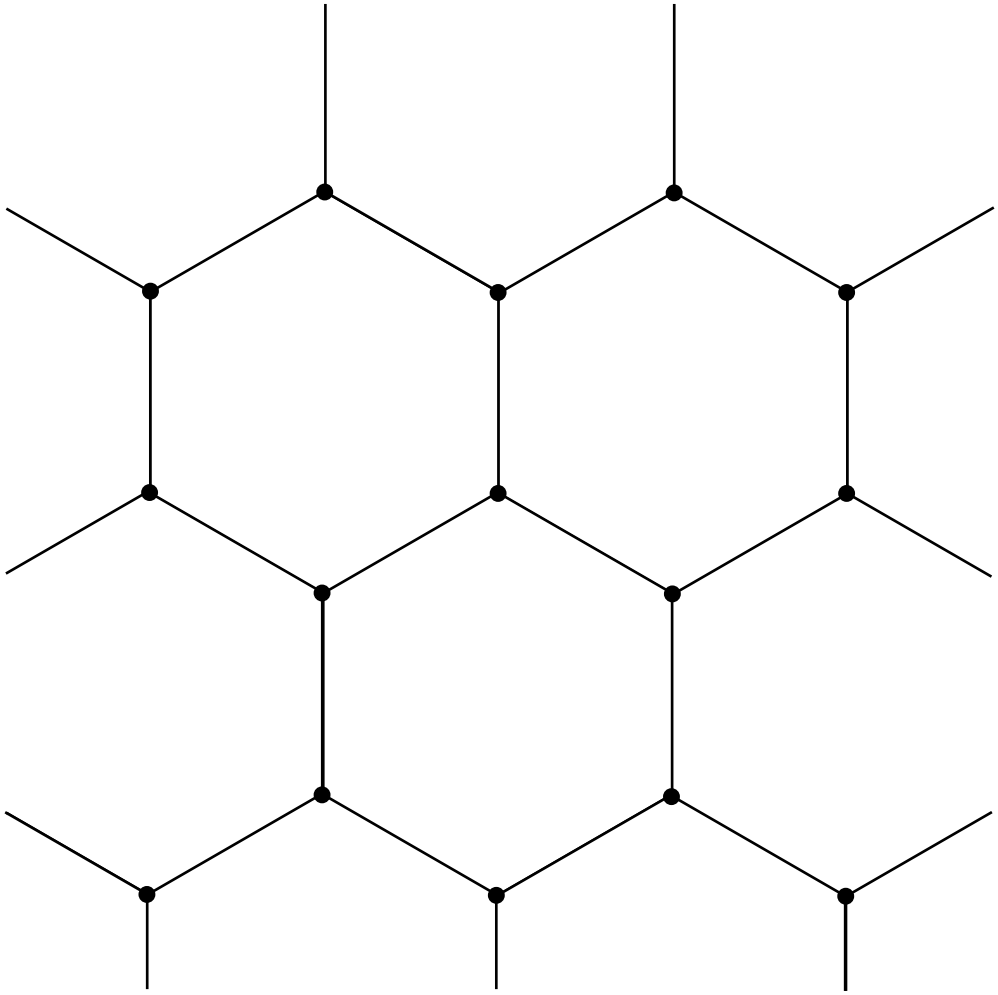
Figure 1.

Le *tour de taille* d'un graphe X est la longueur du plus petit circuit de X (on dit aussi *maille*, ou *systole*[1]) : on le note $g(X)$.

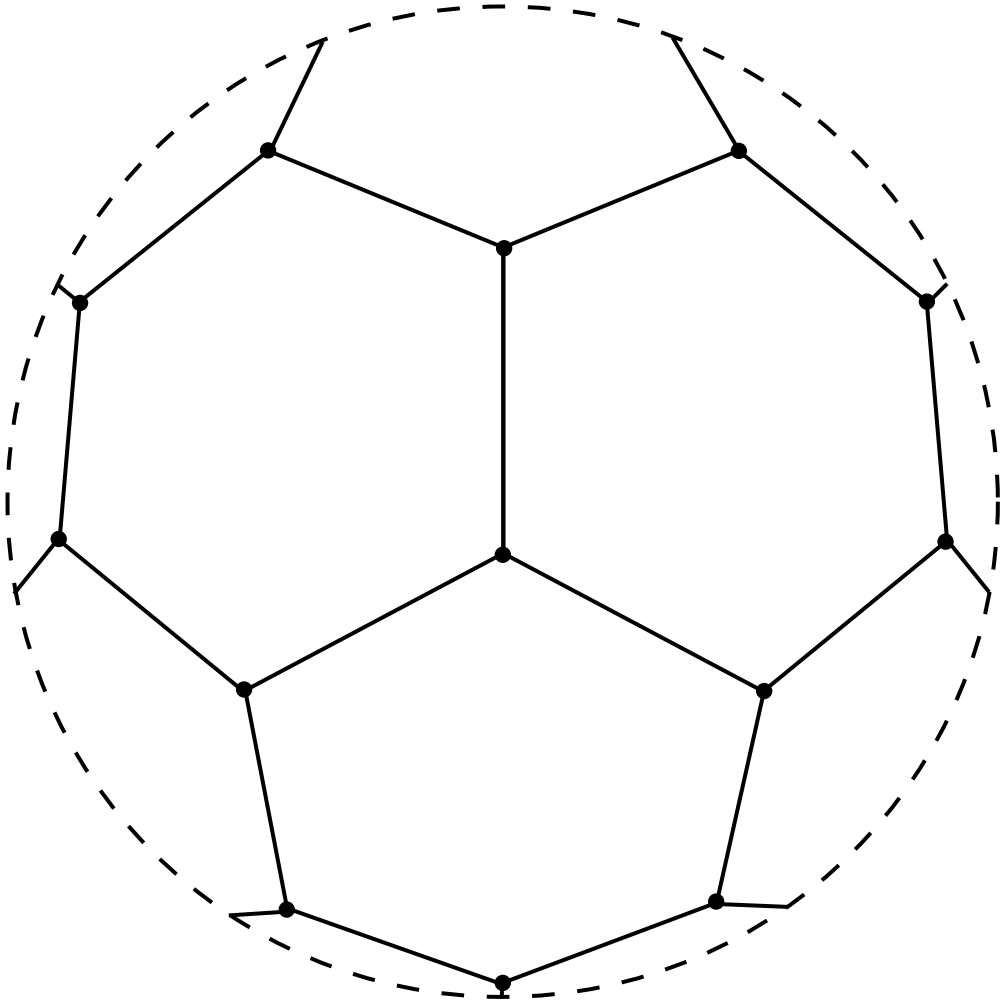
Pour un graphe X k-régulier, connexe, fini, il existe une relation simple entre le tour de taille $g = g(X)$, et le nombre de sommets $|X|$. Notons $r = \left[\frac{g-1}{2}\right]$ le plus grand entier strictement inférieur à $\frac{g}{2}$. Fixons un sommet $x_0 \in X$, et considérons la boule fermée $B_{\leq r}(x_0)$ de centre x_0 et de rayon r. Comme $r < g/2$, cette boule ne peut pas contenir de circuit ; en d'autres termes, le graphe induit par X sur $B_{\leq r}(x_0)$, est un arbre (voir Figure 2).

[1] En anglais : "girth" ; en allemand : "taillenweite".

AVANT



APRÈS



Le nombre de sommets de la boule $B_{\leq r}(x_0)$ est facile à estimer : on additionne le nombre de sommets à distance 0 de x_0, le nombre de sommets à distance 1, le nombre de sommets à distance 2, etc ... Comme le graphe X est k-régulier, ceci donne :

$$|B_{\leq r}(x_0)| = 1 + k + k(k-1) + k(k-1)^2 + \cdots + k(k-1)^{r-1} = \frac{k(k-1)^r - 2}{k-2}\,.$$

Ecrivons maintenant l'inégalité triviale $|B_{\leq r}(x_0)| \leq |X|$ [2]. En passant au logarithme en base $k-1$, on obtient la relation recherchée :

$$\left[\frac{g(X)-1}{2}\right] \leq \log_{k-1}|X| + \log_{k-1}\left[\frac{k-2+\frac{2}{|X|}}{k}\right]\,.$$

Cette relation prend une forme particulièrement simple si, au lieu de considérer un graphe X, on considère une famille $(X_n)_{n\geq 1}$ de graphes k-réguliers, connexes, finis, avec $|X_n| \to +\infty$ pour $n \to \infty$:

$$g(X_n) \leq (2 + o(1)) \log_{k-1}|X_n| \qquad (1)$$

(ici $o(1)$ est une quantité qui tend vers 0 pour $n \to \infty$).

L'intérêt de considérer des familles de graphes vient de la théorie des circuits de communication : un graphe modélise un réseau de communication, les sommets représentant les utilisateurs (émetteurs/récepteurs d'informations), les arêtes représentant les canaux le long desquels l'information se propage. La condition $\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty$ correspond au désir d'avoir des modèles de réseaux arbitrairement grands. L'exigence de k-régularité est de nature économique : en effet, le meilleur réseau de communication sur m sommets est donné par le graphe complet, où tout sommet est connecté à tout autre ; mais le nombre d'arêtes est $\frac{m(m-1)}{2}$, il est quadratique en m. Par contre, pour notre famille $(X_n)_{n\geq 1}$ de graphes k-réguliers, le nombre d'arêtes de X_n est $\frac{k|X_n|}{2}$, ce nombre croît donc linéairement avec $|X_n|$. Dans ce contexte, il est intéressant d'avoir le tour de taille le plus grand possible : le fait que les circuits soient longs veut dire qu'il y aura peu de retours de l'information, c'est-à-dire peu de redondances.

Définition. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une famille de graphes k-réguliers connexes, finis, avec $\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty$. Nous dirons que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une* famille à grand tour de taille *s'il existe $C > 0$ tel que*

$$g(X_n) \geq (C + o(1)) \log_{k-1}|X_n| \quad \textit{pour tout} \quad n \geq 1\,.$$

Par l'inégalité (1), on a nécessairement $C \leq 2$. Une famille est à grand tour de taille, si le tour de taille est de l'ordre du logarithme du nombre de sommets. Il

[2] Pour le graphe de Petersen, on a l'égalité $B_{\leq r}(x_0) = X$, mais c'est exceptionnel !

n'est pas du tout évident que de telles familles existent. En effet, vu l'erreur commise dans la comparaison entre $B_{\leq r}(x_0)$ et X, on pourrait penser que $|X|$ est en général bien plus grand que $|B_{\leq r}(x_0)|$. Il est donc assez surprenant que de telles familles de graphes existent bel et bien : ceci a été démontré en 1962 par P. Erdös et H. Sachs [5] : par des méthodes non constructives, ils démontrent l'existence de familles $(X_n)_{n\geq 1}$ avec $g(X_n) \geq \log_{k-1}|X_n|$ (c'est-à-dire $C = 1$). Une jolie construction élémentaire, complètement explicite, a ensuite été donnée par G. Margulis [7] : malheureusement elle ne donne que $C = \frac{2\log 3}{3\log(1+\sqrt{2})} \simeq 0.831$. Notre but dans cet article est de présenter une preuve élémentaire[3] du résultat suivant, obtenu indépendemment par A. Lubotzky, R. Phillips, P. Sarnak [6] d'une part, G. Margulis [8] d'autre part.

Théorème 1. *Soient p, q des nombres premiers impairs distincts, avec $p \equiv 1$ (mod. 4) et $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ (c'est-à-dire p n'est pas un carré modulo q). Il existe une famille $(X^{p,q})$, construite explicitement, de graphes $(p+1)$-réguliers sur $q(q^2-1)$ sommets, avec $g(X^{p,q}) \geq \left(\frac{4}{3} + o(1)\right)\log_p |X^{p,q}|$.*

Les graphes $X^{p,q}$ seront des graphes de Cayley du groupe fini $\mathrm{PGL}_2(q)$, d'ordre $\frac{q(q-1)}{2}$, par rapport à une partie génératrice à $p+1$ éléments construite à partir du théorème des quatre carrés de Jacobi.

A notre connaissance, la constante $C = \frac{4}{3}$ du Théorème 1, détient le record du monde. La preuve ci-dessous est tirée d'un travail en commun avec G. Davidoff et P. Sarnak [2].

2 Rappels

2.1 Graphes de Cayley

Les graphes que nous construirons seront des graphes de Cayley. Rappelons rapidement cette notion.

Soit Γ un groupe (fini ou infini), et S une partie *finie* de Γ. Nous supposons que S ne contient pas le neutre 1 de Γ, et que S est symétrique, c'est-à-dire stable par le passage à l'inverse. Le *graphe de Cayley* $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est Γ, et dont l'ensemble des arêtes est formé des paires $\{x, y\}$ pour lesquelles il existe $s \in S$ tel que $y = xs$. Notons que cette relation d'adjacence est symétrique (car $S = S^{-1}$) et que le graphe $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est simple (car $1 \notin S$).

La figure 3 donne différents exemples de graphes de Cayley du groupe additif $\Gamma = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (groupe cyclique d'ordre 6),

Les propriétés principales d'un graphe de Cayley sont les suivantes :

[3] La preuve originale utilisait les groupes algébriques sur les adèles, en particulier le théorème d'approximation forte de Kneser.

- $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est k-régulier, avec $k = |S|$;
- Γ agit par automorphismes sur $\mathcal{G}(\Gamma, S)$, transitivement sur les sommets (grâce aux multiplications gauches de Γ) ;
- $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est connexe si et seulement si S engendre Γ (en effet : $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est connexe si et seulement si tout sommet peut être relié au sommet $1 \in \Gamma$, si et seulement si tout élément de Γ s'écrit comme un produit d'éléments de S).

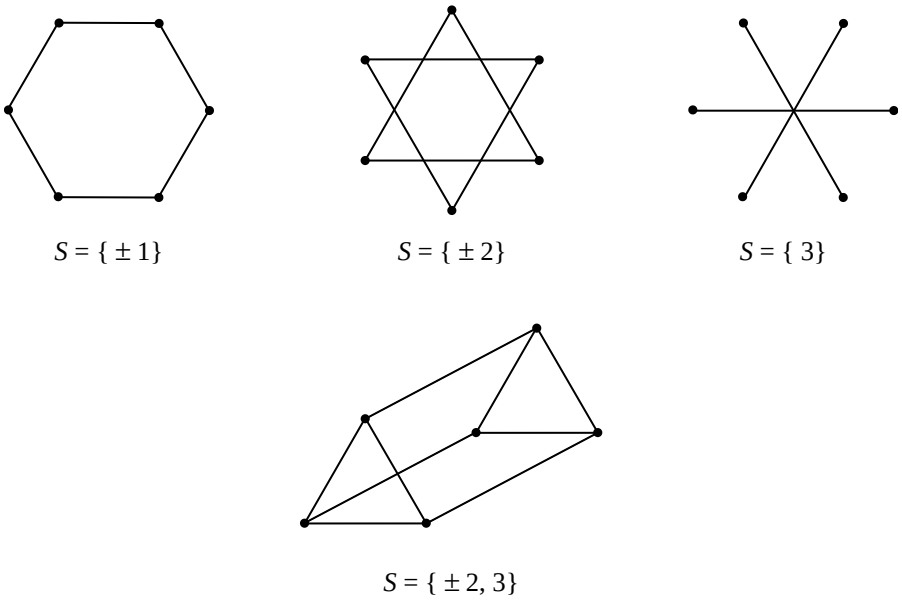


Figure 3.

2.2 Sommes de 4 carrés

Partons du théorème des 4 carrés de Jacobi (voir [9], [2] pour les preuves élémentaires) : si p est premier, il y a $8(p+1)$ manières d'écrire p comme somme de 4 carrés d'entiers :

$$|\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^4 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p\}| = 8(p+1)\,.$$

Supposons dorénavant $p \equiv 1 \pmod 4$. En réduisant $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2 = p$ modulo 4, et en se rappelant que les carrés modulo 4 sont 0 et 1, on voit qu'exactement un des x_i est impair, et les autres pairs. Ainsi

$$|\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^4 : x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2 = p\,,\ x_0 \text{ impair},\ x_0 > 0\}| = p+1\,. \quad (2)$$

2.3 Quaternions

Si R est un anneau commutatif à unité, nous noterons $\mathbb{H}(R)$ l'anneau des *quaternions de Hamilton* à coefficients dans R

$$\mathbb{H}(R) = \{a_0 + a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in R\}$$

où les symboles i, j, k sont soumis aux relations usuelles :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1\,,\ ij = -ji = k\,,\ jk = -kj = i\,,\ ki = -ik = j\,.$$

Si $\alpha = a_0 + a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k$ est un quaternion, nous définissons le *quaternion conjugué* $\overline{\alpha} = a_0 - a_1\, i - a_2\, j - a_3\, k$, ainsi que la *norme* :

$$N(\alpha) = \overline{\alpha}\,\alpha = \alpha\,\overline{\alpha} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\,.$$

Notons $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments (q impair). Rappelons que, dans $\mathbb{F}_q$, l'équation $1 + x^2 + y^2 = 0$ possède toujours une solution au moins (pour le voir, posons $A_+ = \{1 + x^2 : x \in \mathbb{F}_q\}$, $A_- = \{-y^2 : y \in \mathbb{F}_q\}$: ces deux sous-ensembles de $\mathbb{F}_q$ ont tous deux $\frac{q+1}{2}$ éléments, soit plus de la moitié des éléments de $\mathbb{F}_q$, donc leur intersection est non vide : il existe donc $x, y \in \mathbb{F}_q$ tels que $1 + x^2 = -y^2$).

L'anneau de quaternions $\mathbb{H}(\mathbb{F}_q)$ est isomorphe à l'anneau $M_2(\mathbb{F}_q)$ des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Cet isomorphisme n'est pas canonique, mais dépend du choix des deux éléments x, y tels que $1 + x^2 + y^2 = 0$ dans $\mathbb{F}_q$. Choisissons ces éléments une fois pour toutes, et posons

$$\begin{aligned} \psi_q : \mathbb{H}(\mathbb{F}_q) &\to M_2(\mathbb{F}_q) : a_0 + a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k \\ &\mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1\, x + a_3\, y & -a_1\, y + a_2 + a_3\, x \\ -a_1\, y - a_2 + a_3\, x & a_0 - a_1\, x - a_3\, y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie que ψ_q est un isomorphisme d'anneaux, tel que

$$\det \psi_q(\alpha) = N(\alpha) \qquad (\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)) \tag{3}$$

De plus $\psi_q(\alpha\,\overline{\alpha}) = \psi_q(\overline{\alpha}\,\alpha)$ est une matrice scalaire.

2.4 Groupes finis

Notons $\mathrm{GL}_2(q)$ le groupe des matrices 2×2, inversibles, à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. L'ordre de $\mathrm{GL}_2(q)$ est

$$|\mathrm{GL}_2(q)| = q(q-1)(q^2-1)$$

(en effet, on peut choisir de $q^2 - 1$ façons la première colonne d'une matrice inversible, et de $q^2 - q = q(q-1)$ façons sa deuxième colonne, linéairement indépendante de la première).

Notons $\mathrm{SL}_2(q)$ le sous-groupe des matrices de déterminant 1. On a donc $\mathrm{SL}_2(q) = \mathrm{Ker}\,[\det : \mathrm{GL}_2(q) \to \mathbb{F}_q^\times]$ et par conséquent

$$|\mathrm{SL}_2(q)| = q(q^2-1)\,.$$

Notons enfin $\mathrm{PGL}_2(q)$ le quotient de $\mathrm{GL}_2(q)$ par son centre, formé des matrices scalaires. On a donc

$$|\mathrm{PGL}_2(q)| = q(q^2-1)\,.$$

Notons $\varphi_q : \mathrm{GL}_2(q) \to \mathrm{PGL}_2(q)$ l'application-quotient, et posons $\mathrm{PSL}_2(q) = \varphi_q(\mathrm{SL}_2(q))$. On a donc

$$|\mathrm{PSL}_2(q)| = \begin{cases} q(q^2-1) & \text{si } q \text{ est pair} \\ \frac{q(q^2-1)}{2} & \text{si } q \text{ est impair} \end{cases}$$

Remarquons que, pour $A \in \mathrm{GL}_2(q)$, on a $\varphi_q(A) \in \mathrm{PSL}_2(q)$ si et seulement si $\det A$ est un carré dans $\mathbb{F}_q$.

3 Les graphes $X^{p,q}$

Comme en (2), considérons les $p+1$ solutions de

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p\,, \quad x_0 \text{ impair}, \ x_0 > 0\,.$$

A chacune de ces solutions, associons le quaternion entier

$$x_0 + x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k\,.$$

Ceci fournit un ensemble S_p de $p+1$ quaternions dans $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$. Considérons la réduction modulo q

$$\tau_q : \mathbb{H}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)$$

composée avec l'isomorphisme

$$\psi_q : \mathbb{H}(\mathbb{F}_q) \to M_2(\mathbb{F}_q)\,.$$

On a, pour $\alpha \in S_p$:

$$\det\left(\psi_q(\tau_q(\alpha))\right) \equiv N(\alpha) = p \ (\mathrm{mod.}\, q)\,,$$

donc $\psi_q(\tau_q(S_p))$ est contenu dans le groupe $\mathrm{GL}_2(q)$ des matrices inversibles de $M_2(\mathbb{F}_q)$. Notons que S_p est stable par le passage au conjugué $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$. Comme $\psi_q(\tau_q(\overline{\alpha}\,\alpha))$ est une matrice scalaire, ceci suggère de passer au quotient par les matrices scalaires, donc de travailler dans le quotient $\mathrm{PGL}_2(q)$.

On a alors, pour $\alpha \in S_p$:

$$\varphi_q \circ \psi_q \circ \tau_q\,(\alpha\,\overline{\alpha}) = 1$$

ce qui montre que $S_{p,q} = (\varphi_q \circ \psi_q \circ \tau_q)(S_p)$ est une partie symétrique de $\mathrm{PGL}_2(q)$. Il est facile de voir que, si q est assez grand par rapport à p (c'est-à-dire $q > 2\sqrt{p}$), alors $(\varphi_q \circ \psi_q \circ \tau_q)\,|_{S_p}$ est injective, et $1 \notin S_{p,q}$.

Si $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ (c'est-à-dire si p est un carré modulo q), alors $S_{p,q} \subseteq \mathrm{PSL}_2(q)$. Nous posons $X^{p,q} = \mathcal{G}(\mathrm{PSL}_2(q), S_{p,q})$: c'est un graphe $(p+1)$-régulier, à $\frac{q(q^2-1)}{2}$ sommets.

Si $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ (c'est-à-dire si p n'est pas un carré modulo q), alors $S_{p,q} \subseteq \mathrm{PGL}_2(q) \backslash \mathrm{PSL}_2(q)$, et nous posons $X^{p,q} = \mathcal{G}(\mathrm{PGL}_2(q), S_{p,q})$: c'est un graphe $(p+1)$-régulier à $q(q^2-1)$ sommets.

Nous devons maintenant montrer que $X^{p,q}$ est connexe, c'est-à-dire montrer que $S_{p,q}$ engendre

$$\begin{cases} \mathrm{PSL}_2(q) & \text{si} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = 1 \\ \mathrm{PGL}_2(q) & \text{si} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1 \end{cases}$$

Après cela, il nous restera à estimer le tour de taille de $X^{p,q}$. Pour traiter ces deux problèmes, nous allons construire une famille de graphes $Y^{p,q}$, connexes par construction, et les comparer aux $X^{p,q}$.

4 Les graphes $Y^{p,q}$

Soit $\Lambda'(2)$ le sous-ensemble suivant de $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$:

$$\Lambda'(2) = \{\alpha = a_0 + a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}) : N(\alpha) = p^r \,(r \in \mathbb{N}),\ \alpha \text{ impair}\}\,.$$

Remarquons que $\Lambda'(2)$ est un monoïde multiplicatif contenant S_p. En particulier $\Lambda'(2)$ contient les mots sur l'alphabet S_p. Nous dirons qu'un tel mot est réduit s'il ne contient aucun sous-mot de la forme $\alpha\,\overline{\alpha}$ ou $\overline{\alpha}\,\alpha$ ($\alpha \in S_p$).

Théorème 2. (Dickson 1922) *Ecrivons* $S_p = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{p+1}{2}}, \overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_{\frac{p+1}{2}}}\}$. *Tout élément* $\alpha \in \Lambda'(2)$ *, avec* $N(\alpha) = p^r$*, s'écrit de façon unique* $\alpha = \pm\, p^\ell\, w_m$*, où* w_m *est un mot réduit sur* S_p*, et* $2\ell + m = r$.

Pour une preuve de ce résultat, voir [3], [2].

Le théorème de Dickson voit pointer un groupe libre, plus exactement le groupe libre sur les $\frac{p+1}{2}$ générateur $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\frac{p+1}{2}}$. Pour faire apparaître celui-ci explicitement, passons au quotient $\Lambda'(2)$ par une relation d'équivalence : pour $\alpha, \beta \in \Lambda'(2)$: $\alpha \sim \beta$ s'il existe des naturels m, k tels que $p^m\,\alpha = \pm\, p^\ell\,\beta$. Notons $[\alpha]$ la classe de α. Le théorème de Dickson se reformule en disant que $\Lambda(2) = \Lambda'(2)/\sim$ est le groupe libre $\mathbb{L}_{\frac{p+1}{2}}$ sur les générateurs $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_{\frac{p+1}{2}}]$.

La réduction τ_q modulo q envoie $\Lambda'(2)$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times$ de $\mathbb{H}(\mathbb{F}_q)$. Notons $Z(\mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times)$ le centre de $\mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times$. L'homomorphisme de monoïdes $\tau_q : \Lambda'(2) \to \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times$ induit par passage au quotient un homomorphisme de groupes

$$\Pi_q : \Lambda(2) \to \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times / Z(\mathbb{H}(\mathbb{F}_q))^\times\,.$$

A nouveau $\Pi_q \mid_{S_p}$ est injectif si q est assez grand par rapport à p ($q > 2\sqrt{p}$ marche), et nous définissons $Y^{p,q}$ comme le graphe de Cayley de l'image de Π_q par rapport à S_p :

$$Y^{p,q} = \mathcal{G}(\mathrm{Im}\,\Pi_q, S_p)\,.$$

Par construction, $Y^{p,q}$ est un graphe $(p+1)$-régulier connexe. Comparons la construction de $X^{p,q}$ et celle de $Y^{p,q}$ au moyen d'un diagramme commutatif. Pour cela, remarquons que l'isomorphisme $\psi_q : \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times \to \mathrm{GL}_2(q)$ envoie $Z(\mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times)$ sur les matrices scalaires, et induit donc un isomorphisme

$$\Psi_q : \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times / Z(\mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times) \to \mathrm{PGL}_2(q)\,.$$

On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda'(2) \supset S_p & \xrightarrow{\tau_q} & \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times & \xrightarrow{\psi_q} & \mathrm{GL}_2(q) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi_q \\
\Lambda(2) & \xrightarrow{\Pi_q} & \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times / Z(\mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^\times) & \xrightarrow{\Psi_q} & \mathrm{PGL}_2(q) \supseteq Q_{p,q}\,.
\end{array}$$

Ce diagramme montre déjà que $Y^{p,q}$ est une composante connexe de $X^{p,q}$. L'inconvénient de $Y^{p,q}$ est que nous ne connaissons pas a priori son nombre de sommets (contrairement à $X^{p,q}$). Son avantage est qu'il est donné comme quotient d'un arbre (l'arbre du groupe libre $\Lambda(2) \simeq \mathbb{L}_{\frac{p+1}{2}}$), et que son tour de taille est ainsi facile à estimer.

Notons $\Lambda(2q)$ le noyau de l'homomorphisme Π_q. On peut penser à $\Lambda(2q)$ comme à un sous-groupe de congruence dans $\Lambda(2)$. Il est facile de vérifier que

$$\Lambda(2q) = \{[\alpha] \in \Lambda(2) : \alpha = a_0 + a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k\,,\ q \text{ divise } a_1, a_2, a_3\}\,. \qquad (4)$$

Proposition 1. *$g(Y^{p,q}) \geq 2\log_p q$; de plus, si $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, alors $g(Y^{p,q}) \geq 4\log_p q - \log_p 4$.*

Preuve. Notons g pour $g(Y^{p,q})$. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_g = x_0$ les sommets d'un circuit de longueur g dans $Y^{p,q}$. Comme $Y^{p,q}$ est un graphe de Cayley, nous pouvons (quitte à translater dans $\mathrm{Im}\,\Pi_q$) supposer que $x_0 = 1$. En relevant ce chemin en un chemin issu de l'origine dans l'arbre de Cayley de $\Lambda(2)$, nous voyons que

$$g = \min\{|[\alpha]|_{S_p} : [\alpha] \in \Lambda(2q)\,,\ [\alpha] \neq 1\}\,,$$

où $|\cdot|_{S_p}$ désigne la longueur des mots par rapport à S_p dans le groupe libre $\Lambda(2)$. Soit donc $\alpha = a_0 + a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k \in \Lambda'(2)$, tel que $[\alpha] \in \Lambda(2q)$ et $|[\alpha]|_{S_p} = g$. En prenant les normes, on a

$$p^g = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

et au moins un des nombres a_1, a_2, a_3 est non nul, car $[\alpha] \neq 1$. D'autre part q divise a_1, a_2, a_3, par (4). Donc $p^g \geq q^2$, c'est-à-dire $g \geq 2 \log_p q$.

Si $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, comme $p^g \equiv a_0^2 \pmod q$, on voit d'abord que g est pair, disons $g = 2h$. Remarquons qu'on a en fait

$$p^{2h} \equiv a_0^2 \pmod{q^2}$$

ce qui implique (pas complètement trivialement, car on travaille modulo q^2) :

$$p^h \equiv \pm\, a_0 \pmod{q^2}\,.$$

D'autre part $a_0^2 \leq p^g$, donc $|a_0| \leq p^h$. Supposons par l'absurde $g < 4 \log_p q - \log_p 4$, c'est-à-dire $p^h < \frac{q^2}{2}$. Alors $|p^h \mp a_0| < q^2$. De la congruence précédente, nous tirons $p^h = \pm\, a_0$. Alors $p^g = a_0^2$, ce qui implique $a_1 = a_2 = a_3 = 0$: c'est la contradiction désirée. □

Notons que cette proposition, jointe à l'inégalité (1), donne la borne inférieure

$$|Y^{p,q}| = |\mathrm{Im}\, \Pi_q| \geq q\,. \tag{5}$$

5 Preuve du Théorème 1

Le Théorème 1 résulte de la proposition suivante :

Proposition 2. *Si $q > \sqrt{2}\, p^8$, alors $X^{p,q}$ est connexe [et donc $X^{p,q} \simeq Y^{p,q}$, et :*

$$\begin{aligned} &\textit{si } \left(\tfrac{p}{q}\right) = 1 \ : \quad g(X^{p,q}) \geq \tfrac{2}{3}\, \log_p\, |X^{p,q}| \\ &\textit{si } \left(\tfrac{p}{q}\right) = -1 \ : \quad g(X^{p,q}) \geq \left(\tfrac{4}{3} + o(1)\right) \log_p\, |X^{p,q}|]\,. \end{aligned}$$

Preuve. Nous devons montrer que $S_{p,q}$ engendre

$$\begin{cases} \mathrm{PSL}_2(q) & \text{si} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = 1 \\ \mathrm{PGL}_2(q) & \text{si} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1\,. \end{cases}$$

Notons $\langle S_{p,q} \rangle$ le sous-groupe engendré par $S_{p,q}$, et posons

$$H = \langle S_{p,q} \rangle \cap \mathrm{PSL}_2(q)\,.$$

Pour $g, h \in \mathrm{PSL}_2(q)$, notons $[g,h] = g\, h\, g^{-1}\, h^{-1}$ le commutateur de g et h. Nous allons utiliser une propriété des sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(q)$, encore due à Dickson :

Théorème 3. (Dickson 1901) *Soit q un nombre premier, $q \geq 7$. Soit H un sous-groupe propre de $\mathrm{PSL}_2(q)$. Si $|H| > 60$, alors H est* métabélien, *c'est-à-dire $[[g_1, g_2], [g_3, g_4]] = 1$ pour tous $g_1, g_2, g_3, g_4 \in H$.*

Pour une preuve de ce résultat, voir [4], [2]. La preuve du Théorème 1 continue alors comme suit. Supposons par l'absurde que $S_{p,q}$ n'engendre pas ce qu'il doit engendrer, ce qui revient à dire que H est un sous-groupe propre de $\mathrm{PSL}_2(q)$. Remarquons que $|H| \geq q > 60$, par (5). Nous avons vu d'autre part que le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\langle S_{p,q} \rangle, S_{p,q})$ est isomorphe à $Y^{p,q}$. Considérons deux cas :

a) Si $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, alors la relation $[[g_1, g_2], [g_3, g_4]] = 1$, appliquée à quatre éléments de $S_{p,q}$, fournit un circuit de longueur 16 dans $Y^{p,q}$. Nous obtenons, grâce à la Proposition 1 :

$$2 \log_p q \leq g(Y^{p,q}) \leq 16$$

c'est-à-dire $q \leq p^8$, une contradiction.

b) Si $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, alors la relation $[[g_1, g_2], [g_3, g_4]] = 1$, appliquée à quatre carrés d'éléments de $S_{p,q}$ fournit un circuit de longueur 32 dans $Y^{p,q}$. Nous obtenons, par la Proposition 1 :

$$4 \log_p q - \log_p 4 \leq g(Y^{p,q}) \leq 32$$

c'est-à-dire $q \leq \sqrt{2}\, p^8$, à nouveau une contradiction.

□

Remarques. 1) Dans les articles originaux [6], [8], la connexité de $X^{p,q}$ est démontrée pour $q > 2\sqrt{p}$, ce qui est évidemment meilleur que notre hypothèse de la Proposition 2.

2) Si $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, Biggs et Boshier [1] ont démontré en 1992 que $g(X^{p,q}) \leq 4 \log_p q + \log_p 4 + 2$, de sorte que la constante $C = \frac{4}{3}$ du Théorème 1 (ou de la Proposition 2) est optimale.

Références

[1] N.L. Biggs & A.G. Boshier, Note on the girth of Ramanujan graphs, *J. Comb. Theory*, Ser. B **49**, n° 2 (1990), 190-194.

[2] G. Davidoff, P. Sarnak & A. Valette, Elementary number theory, group theory and Ramanujan graphs, à paraître dans Cambridge Univ. Press.

[3] L.E. Dickson, Arithmetic of quaternions, *Proc. London Math. Soc.* (2) **20** (1922), 225-232.

[4] L.E. Dickson, *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*, Dover Publications, New York, 1958.

[5] P. Erdös & H. Sachs, Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knollenzahl, *Wiss. Z. Univ. Halle-Willenberg Math. Nat. R.* **12** (1963), 251-258.

[6] A. Lubotzky, R. Phillips & P. Sarnak, Ramanujan graphs, *Combinatorica* **8** (1988), 261-277.

[7] G.A. Margulis, Explicit constructions of graphs without short cycles and low density codes, *Combinatorica* **2** (1982), 71-78.

[8] G.A. Margulis, Explicit group-theoretical constructions of combinatorial schemes and their application to the design of expanders and concentrators, *J. Probl. Inf. Transm.* **24** n° 1 (1988), 39-46.

[9] A. Weil, Sur les sommes de trois et quatre carrés (1974), Œuvres Scientifiques Vol. III, Springer-Verlag, 1979.

Alain Valette
Institut de Mathématiques
Rue Emile Argand 11
CH-2007 Neuchâtel – SUISSE

e-mail : alain.valette@unine.ch